УДК 519.2

ВЫДЕЛЕНИЕ ТРЕНДА ДИСПЕРСИИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА МОМЕНТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

И.Г. Устинова

Томский политехнический университет
E-mail: igu@sibmail.com

Получены оценки тренда дисперсии в явном виде при пуассоновском потоке моментов измерений. Рассмотрены частные случаи тренда: линейный, квадратичный и в виде сплайна первого порядка. Исследованы статистические характеристики полученных оценок. Показана их несмещенность, найдена ковариационная матрица оценок параметров тренда.

Ключевые слова:
Тренд дисперсии, сплайн первого порядка, пуассоновский поток, оценки параметров, статистические свойства оценок.

Key words:
Dispersion trend, first-order spline, Poisson current, parameter estimations, estimations statistical properties.

Целью работы является нахождение оценок параметров тренда дисперсии случайного процесса, когда моменты измерений образуют пуассоновский поток постоянной интенсивности λ, и исследование их статистических характеристик.

Постановка задачи

Рассмотрим случайный процесс $x(t)$. Обозначим $x(t_i)=x_i$, $i=\overline{1,N}$ независимые случайные величины, распределенные нормально с $M[x_i]=0$ и $D[x_i]=D[t_i]$. Моменты измерений t_i, $i=\overline{1,N}$ образуют пуассоновский поток постоянной интенсивности λ. В качестве модели неизвестной дисперсии предлагается использовать $D[t_i]=\sum_{s=0}^{k}\theta_s\varphi_s(t_i)$, где $\varphi_s(t_i)$ – некоторые известные функции времени, а θ_s – неизвестные параметры. Оценки неизвестных параметров $\theta_s, s=\overline{0,k}$ будем искать в виде $\hat{\theta}_s=\sum_{i=1}^{N}x^2(t_i)\psi_s(t_i)$, где функции $\varphi_s(t_i)$, $s=\overline{0,k}$ выбираются таким образом, чтобы выполнялось условие: $\mathrm{M}[\hat{\theta}_s]=\theta_s$.

Оценки неизвестных параметров тренда

Найдем оценки $\hat{\theta}_s$, $s=\overline{0,k}$, исходя из условия:

$$Q=\sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^2-\sum_{s=0}^{k}\hat{\theta}_s\varphi_s(t_i)\right\}^2\Rightarrow\min_{\hat{\theta}_s}$$

методом наименьших квадратов [1]. Из условия $\frac{\partial Q}{\partial\hat{\theta}_s}=0$ получаем систему $k+1$ линейных уравнений с $k+1$ неизвестными:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial\hat{\theta}_0}=\sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^2-\sum_{s=0}^{k}\hat{\theta}_s\varphi_s(t_i)\right\}\varphi_0(t_i)=0;\\ \dfrac{\partial Q}{\partial\hat{\theta}_1}=\sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^2-\sum_{s=0}^{k}\hat{\theta}_s\varphi_s(t_i)\right\}\varphi_1(t_i)=0;\\ \dots\\ \dfrac{\partial Q}{\partial\hat{\theta}_k}=\sum_{i=1}^{N}\left\{x_i^2-\sum_{s=0}^{k}\hat{\theta}_s\varphi_s(t_i)\right\}\varphi_k(t_i)=0.\end{cases}\qquad(1)$$

Перейдем к матричным обозначениям:

$$\mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix}\varphi_0(t_1) & \varphi_1(t_1) & \dots & \varphi_k(t_1)\\ \varphi_0(t_2) & \varphi_1(t_2) & \dots & \varphi_k(t_2)\\ \dots & & & \\ \varphi_0(t_N) & \varphi_1(t_N) & \dots & \varphi_k(t_N)\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N}x^2(t_i)\varphi_0(t_i)\\ \sum_{i=1}^{N}x^2(t_i)\varphi_1(t_i)\\ \dots\\ \sum_{i=1}^{N}x^2(t_i)\varphi_k(t_i)\end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=[\hat{\theta}_0\quad\hat{\theta}_1\quad\dots\quad\hat{\theta}_k]^T.$$

В матричных обозначениях система (1) будет иметь вид: $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\hat{\theta}=\mathbf{Y}$. Обозначим $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}$ через $\mathbf{X}$, тогда

$$\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{Y}.\qquad(2)$$

Заметим, что матрица

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N}\varphi_0^2(t_i) & \sum_{i=1}^{N}\varphi_0(t_i)\varphi_1(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^{N}\varphi_0(t_i)\varphi_k(t_i)\\ \sum_{i=1}^{N}\varphi_0(t_i)\varphi_1(t_i) & \sum_{i=1}^{N}\varphi_1^2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^{N}\varphi_1(t_i)\varphi_k(t_i)\\ \dots & & & \\ \sum_{i=1}^{N}\varphi_0(t_i)\varphi_k(t_i) & \sum_{i=1}^{N}\varphi_1(t_i)\varphi_k(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^{N}\varphi_k^2(t_i)\end{bmatrix}$$

есть матрица со случайными элементами. Нахождение обратной матрицы – сложная задача, а нахождение обратной матрицы к случайной – практически неразрешимая. Поэтому для нахождения оценок неизвестных параметров θ_s, $s=\overline{0,k}$ перейдем от матрицы $\mathbf{X}$ к матрице $\overline{\mathbf{X}}$, усреднив матрицу $\mathbf{X}$ по моментам измерений $\{t_i, i=\overline{1,N}\}$, применяя технику усреднения [2]

$$\overline{\mathbf{X}}=\lambda\begin{bmatrix}\int_0^T\varphi_0^2(u)du & \int_0^T\varphi_0(u)\varphi_1(u)du & \dots & \int_0^T\varphi_0(u)\varphi_k(u)du\\ \int_0^T\varphi_0(u)\varphi_1(u)du & \int_0^T\varphi_1^2(u)du & \dots & \int_0^T\varphi_1(u)\varphi_k(u)du\\ \dots & & & \\ \int_0^T\varphi_0(u)\varphi_k(u)du & \int_0^T\varphi_1(u)\varphi_k(u)du & \dots & \int_0^T\varphi_k^2(u)du\end{bmatrix},$$

Обозначим

$$\overline{\mathbf{X}} = \lambda \mathbf{X}_0, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \int_0^T \varphi_0^2(u)du & \int_0^T \varphi_0(u)\varphi_1(u)du & \dots & \int_0^T \varphi_0(u)\varphi_k(u)du \\ \int_0^T \varphi_0(u)\varphi_1(u)du & \int_0^T \varphi_1^2(u)du & \dots & \int_0^T \varphi_1(u)\varphi_k(u)du \\ \dots & & & \\ \int_0^T \varphi_0(u)\varphi_k(u)du & \int_0^T \varphi_1(u)\varphi_k(u)du & \dots & \int_0^T \varphi_k^2(u)du \end{bmatrix},$$

тогда (2) перепишем в виде $\lambda \mathbf{X}_0 \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Y}$ и, следовательно,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{Y}, \tag{4}$$

что и дает явное выражение для оценок неизвестных параметров.

Найдем аналитическое выражение для неизвестных функций $\varphi_s(t_i)$, $s=\overline{0,k}$.

$$\hat{\theta}_s = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \psi_s(t_i), \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_0(t_1) & \psi_0(t_2) & \dots & \psi_0(t_N) \\ \psi_1(t_1) & \psi_1(t_2) & \dots & \psi_1(t_N) \\ \dots & & & \\ \psi_k(t_1) & \psi_k(t_2) & \dots & \psi_k(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} x^2(t_1) \\ x^2(t_2) \\ \dots \\ x^2(t_N) \end{bmatrix},$$

тогда (5) будет иметь вид: $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{\Psi}\mathbf{X}_2$.

Для нахождения выражений для функций $\varphi_s(t_i)$, $s=\overline{0,k}$ потребуем, чтобы выполнялось условие $M[\hat{\boldsymbol{\theta}}]=\boldsymbol{\theta}$, тогда $M\left[\frac{1}{\lambda}\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{Y}\right] = M[\mathbf{\Psi}\mathbf{X}_2]$ или $\frac{1}{\lambda}\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{\Psi}\mathbf{X}_2$, откуда получаем

$$\mathbf{\Psi} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{\Phi}^T, \tag{6}$$

где $\mathbf{X}_0$ – это матрица из (3).

Свойства оценок параметров

Найдем статистические характеристики полученных оценок.

$$M[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = M\left[\frac{1}{\lambda}\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{Y}\right] = \frac{1}{\lambda}\mathbf{X}_0^{-1}M[\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}]\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \tag{7}$$

и следовательно полученные оценки являются несмещенными.

Найдем теперь ковариационную матрицу оценок $\boldsymbol{\theta}$. Имеем

$$\mathbf{V}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = M[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T] =$$

$$= M\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{Y} - M\left[\frac{1}{\lambda}\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{Y}\right]\right)\times \\ \times\left(\frac{1}{\lambda}\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{Y} - M\left[\frac{1}{\lambda}\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{Y}\right]\right)^T \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{V}[\mathbf{Y}](\mathbf{X}_0^{-1})^T. \tag{8}$$

Здесь

$$\mathbf{V}[\mathbf{Y}] = M[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T] - M[\mathbf{Y}]M[\mathbf{Y}^T] =$$

$$= 2N\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} dc^2 & \sum_{i=1}^{N} dca & \dots & \sum_{i=1}^{N} dcb \\ \sum_{i=1}^{N} dca & \sum_{i=1}^{N} da^2 & \dots & \sum_{i=1}^{N} dab \\ \dots & & & \\ \sum_{i=1}^{N} dcb & \sum_{i=1}^{N} dab & \dots & \sum_{i=1}^{N} db^2 \end{bmatrix},$$

$$a = \varphi_1(t_i),\ b = \varphi_k(t_i),\ c = \varphi_0(t_i),\ d = D^2(t_i). \tag{9}$$

При вычислении $\mathbf{V}[\mathbf{Y}]$ воспользуемся тем фактом, что $M[x_i^4]=3D^2(t_i)$.

Рассмотрим теперь следующие частные случаи.

Линейный тренд дисперсии

Предположим теперь, что тренд дисперсии хорошо апроксимируется прямой, т. е.

$$D[t_i] = a + \frac{b}{T}\left(t_i - \frac{T}{2}\right).$$

В данном случае $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix}\hat{a} \\ \hat{b}\end{bmatrix}$, причем сами оценки, как и прежде, доставляются выражением (4). В данном случае функции $\varphi_s(t_i)$, $s=\overline{0,1}$ имеют вид:

$$\varphi_0(t_i) = 1, \quad \varphi_1(t_i) = \frac{t_i}{T} - \frac{1}{2}.$$

Тогда матрица $\overline{\mathbf{X}} = \lambda T\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}\end{bmatrix}$.

Убедившись, что определитель, соответствующий матрице $\overline{\mathbf{X}}$, отличен от нуля, нетрудно найти обратную матрицу $\overline{\mathbf{X}}^{-1} = \frac{1}{\lambda T}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 12\end{bmatrix}$.

В соответствии с равенством (6)

$$\mathbf{\Psi} = \frac{1}{\lambda T}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 12\end{bmatrix}\mathbf{\Phi}^T,$$

где матрица $\mathbf{\Phi}$ – матрица размерности $N\times 2$ вида

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t_1}{T} - \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{t_1}{T} - \frac{1}{2} \\ \dots & \\ 1 & \frac{t_1}{T} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Зная $\mathbf{\Psi}$, записываем явное выражение для оценок неизвестных параметров:

$$\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda T}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N}x^2(t_i)\\ 12\sum_{i=1}^{N}x^2(t_i)\left(\frac{t_i}{T}-\frac{1}{2}\right)\end{bmatrix}.$$

Исследуем статистические характеристики полученных оценок:

$$M[\hat{a}]=M\left[\frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{N}x^2(t_i)\right]=\frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{N}M[x^2(t_i)].$$

Усреднение по величинам x_i приводит к выражению

$$\frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{N}D[t_i]=\frac{1}{\lambda T}\sum_{i=1}^{N}\left[a+b\left(\frac{t_i}{T}-\frac{1}{2}\right)\right].$$

Полученное выражение усредним по величинам t_i, применяя методику [2]

$$\frac{1}{\lambda T}\lambda\int_0^T\left(a+b\left(\frac{u}{T}-\frac{1}{2}\right)\right)du=a,$$

таким образом, имеем $M[\hat{a}]=a$.

Аналогично показываем несмещенность оценки параметра b.

Ковариационная матрица оценок неизвестных параметров a, b задается выражением (8), в котором матрица $\mathbf{V}[\mathbf{Y}]$ задается выражением (9). В данном случае матрица $\mathbf{V}[\mathbf{Y}]$ будет иметь вид:

$$\mathbf{V}[\mathbf{Y}]=2N\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N}D^2(t_i) & \sum_{i=1}^{N}D^2(t_i)\left(\frac{t_i}{T}-\frac{1}{2}\right)\\ \sum_{i=1}^{N}D^2(t_i)\left(\frac{t_i}{T}-\frac{1}{2}\right) & \sum_{i=1}^{N}D^2(t_i)\left(\frac{t_i}{T}-\frac{1}{2}\right)^2\end{bmatrix}.$$

Тогда ковариационная матрица оценок параметров тренда дисперсии представляет собой

$$\mathbf{V}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]=\frac{2N}{\lambda^2T^2}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N}D^2(t_i) & 12\sum_{i=1}^{N}D^2(t_i)\left(\frac{t_i}{T}-\frac{1}{2}\right)\\ 12\sum_{i=1}^{N}D^2(t_i)\left(\frac{t_i}{T}-\frac{1}{2}\right) & 144\sum_{i=1}^{N}D^2(t_i)\left(\frac{t_i}{T}-\frac{1}{2}\right)^2\end{bmatrix}.$$

Найдем $M[\mathbf{V}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]]$. Для этого усредним элементы матрицы $\mathbf{V}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]$ по величинам t_i, тогда

$$M[\mathbf{V}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]]=\frac{2N}{\lambda T}\begin{bmatrix}a^2+\frac{b^2}{12} & 2ab\\ 2ab & 12a^2+\frac{9}{5}b^2\end{bmatrix}.$$

Так как параметры a, b нам неизвестны, а известны лишь их оценки, то в последнем выражении заменим неизвестные параметры на их оценки.

Квадратичный тренд дисперсии

Пусть тренд дисперсии хорошо апроксимируется параболой $D[t_i]=a+bt_i+ct_i^2$.

Задача выделения тренда в этом случае заключается в нахождении оценок неизвестных параметров a, b, c.

В данном случае $\hat{\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{bmatrix}$, и сами оценки, как и прежде, доставляются выражением (5). Функции $\varphi_s(t_i)$, $s=\overline{0,2}$ будут иметь вид: $\varphi_0(t_i)=1$, $\varphi_1(t_i)=t_i$, $\varphi_2(t_i)=t_i^2$. Тогда матрица

$$\overline{\mathbf{X}}=\lambda T\begin{bmatrix}1 & \frac{T}{2} & \frac{T^2}{3}\\ \frac{T}{2} & \frac{T^2}{3} & \frac{T^3}{4}\\ \frac{T^2}{3} & \frac{T^3}{4} & \frac{T^4}{5}\end{bmatrix}=\lambda T\mathbf{X}_0,$$

где $\mathbf{X}_0=\begin{bmatrix}1 & \frac{T}{2} & \frac{T^2}{3}\\ \frac{T}{2} & \frac{T^2}{3} & \frac{T^3}{4}\\ \frac{T^2}{3} & \frac{T^3}{4} & \frac{T^4}{5}\end{bmatrix}.$

Убедившись, что определитель, соответствующий матрице $\mathbf{X}_0$, отличен от нуля, находим обратную матрицу

$$\mathbf{X}_0^{-1}=\frac{720}{T^4}\begin{bmatrix}\frac{T^4}{80} & -\frac{T^3}{20} & \frac{T^2}{24}\\ -\frac{T^3}{20} & \frac{4T^2}{15} & -\frac{T}{4}\\ \frac{T^2}{24} & -\frac{T}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

В соответствии с равенством (6)

$$\boldsymbol{\Psi}=\frac{1}{\lambda T}\frac{720}{T^4}\begin{bmatrix}\frac{T^4}{80} & -\frac{T^3}{20} & \frac{T^2}{24}\\ -\frac{T^3}{20} & \frac{4T^2}{15} & -\frac{T}{4}\\ \frac{T^2}{24} & -\frac{T}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\cdot\boldsymbol{\Phi}^T,$$

где $\boldsymbol{\Phi}^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ t_1 & t_2 & \dots & t_N\\ t_1^2 & t_2^2 & \dots & t_N^2\end{bmatrix}.$

Зная матрицу $\boldsymbol{\Psi}$, записываем явное выражение для оценок неизвестных параметров:

$$\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\\ \hat{c}\end{bmatrix}=\frac{720}{\lambda T^5}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{T_4}{80}-\frac{T^3}{20}t_i+\frac{T^2}{24}t_i^2\right)x^2(t_i)\\ \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{T^3}{20}+\frac{4T^2}{15}t_i-\frac{T}{4}t_i^2\right)x^2(t_i)\\ \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{T^2}{24}-\frac{T}{4}t_i+\frac{1}{4}t_i^2\right)x^2(t_i)\end{bmatrix}.$$

Исследуем статистические характеристики полученных оценок.

$$M[\hat{a}] = \frac{720}{\lambda T^5}\sum_{i=1}^{N} M\left[\left(\frac{T^4}{80}-\frac{T^3}{20}t_i+\frac{T^2}{24}t_i^2\right)x^2(t_i)\right].$$

Усреднение по величинам x_i приводит к выражению

$$\frac{720}{\lambda T^5}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{T^4}{80}-\frac{T^3}{20}t_i+\frac{T^2}{24}t_i^2\right)D(t_i) =$$

$$=\frac{720}{\lambda T^5}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{T^4}{80}-\frac{T^3}{20}t_i+\frac{T^2}{24}t_i^2\right)(a+bt_i+ct_i^2).$$

Полученное выражение усредним по величинам t_i, применяя методику [2]

$$\frac{720}{\lambda T^5}\lambda\int_0^T\left(\frac{T^4}{80}-\frac{T^3}{20}u+\frac{T^2}{24}u^2\right)(a+bu+cu^2)du = a.$$

Аналогично показываем несмещенность оценок параметров b и c.

Ковариационная матрица оценок неизвестных параметров a, b, c задается выражением (8), в котором матрица $\mathbf{V}[\mathbf{Y}]$ задана выражением (9). В данном случае матрица $\mathbf{V}[\mathbf{Y}]$ будет иметь вид

$$\mathbf{V}[\mathbf{Y}] = 2N\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} D^2[t_i] & \sum\limits_{i=1}^{N} D^2[t_i]t_i & \sum\limits_{i=1}^{N} D^2[t_i]t_i^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{N} D^2[t_i]t_i & \sum\limits_{i=1}^{N} D^2[t_i]t_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{N} D^2[t_i]t_i^3 \\ \sum\limits_{i=1}^{N} D^2[t_i]t_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{N} D^2[t_i]t_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{N} D^2[t_i]t_i^4 \end{bmatrix}.$$

Выделение тренда дисперсии в виде сплайна первого порядка

Уточним поставленную задачу для случая, когда функции $\varphi_s(t_i)$, $s=\overline{0,k}$ – заданные функции времени. Разобьем весь отрезок наблюдений $[0;T]$ на части: $[0;T_0],[T_0;2T_0],...,[(k-1)T_0;kT_0]$. На каждом таком отрезке тренд оценивается в виде полинома первой степени. На границах отрезков эти полиномы сшиваются так, чтобы получилась непрерывная кривая, которая и называется сплайном. Пусть, как и прежде, тренд дисперсии в момент времени t_i может быть представлен $D[t_i] = \sum\limits_{s=0}^{k}\theta_s\varphi_s(t_i)$, где $\varphi_s(t_i)$, $s=\overline{0,k}$ – это функции из [3], проиллюстрированные на рисунке.

Оценки неизвестных параметров θ_s, $s=\overline{0,k}$ в данном случае задаются выражением (4). Для нахождения $\mathbf{X}_0^{-1}$ выражения (4) рассмотрим

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi} =$$

$$=\begin{bmatrix} \sum\limits_{t=1}^{T_0}(1-a)^2 & \sum\limits_{t=1}^{T_0}a(1-a) & \dots & 0 \\ \sum\limits_{t=1}^{T_0}a(1-a) & \sum\limits_{t=1}^{T_0}a^2+\sum\limits_{t=T_0+1}^{2T_0}(2-a)^2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sum\limits_{t=(k-1)T_0+1}^{kT_0}(a-k+1)^2 \end{bmatrix},$$

$$a=\frac{t}{T_0}.$$

Матрица $\overline{\mathbf{X}}=M[\mathbf{X}]$ будет иметь вид

$$\overline{\mathbf{X}} = \lambda\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \int\limits_0^{T_0}(1-a)^2dt & \int\limits_0^{T_0}a(1-a)dt & \dots & 0 \\ \int\limits_0^{T_0}a(1-a)dt & \int\limits_0^{T_0}a^2dt+\int\limits_{T_0}^{2T_0}(2-a)^2dt & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \int\limits_{(k-1)T_0}^{kT_0}(a-k+1)^2dt \end{bmatrix},$$

$$a=\frac{t}{T_0}.$$

Вычислив интегралы, входящие в матрицу $\overline{\mathbf{X}}$, получим

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{\lambda T_0}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\varphi_0(t_i) = \begin{cases} 1-\dfrac{t_i}{T_0}, & \text{если } t_i\in[0;T_0], \\ 0, & \text{если } t_i\notin[0;T_0], \end{cases}$$

$$\varphi_s(t_i) = \begin{cases} \dfrac{t_i}{T_0}+1-s, & \text{если } t_i\in[(s-1)T_0;\, sT_0], \\ s+1-\dfrac{t_i}{T_0}, & \text{если } t_i\in[sT_0;\,(s+1)T_0], \qquad s=\overline{1,k-1}, \\ 0, & \text{если } t_i\notin[(s-1)T_0;\,(s+1)T_0], \end{cases}$$

$$\varphi_k(t_i) = \begin{cases} \dfrac{t_i}{T_0}-k+1, & \text{если } t_i\in[(k-1)T_0;\, kT_0], \\ 0, & \text{если } t_i\notin[(k-1)T_0;\, kT_0]. \end{cases}$$

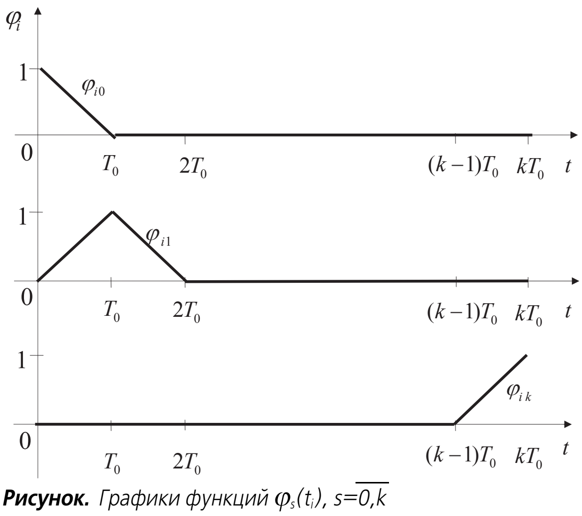

Рисунок. *Графики функций $\varphi_s(t_i)$, $s=\overline{0,k}$*

Для нахождения $\mathbf{X}_0^{-1}$ воспользуемся алгоритмом [4].

В соответствии с этим алгоритмом элемент матрицы $\mathbf{X}_0^{-1}$ (обозначим его z_{ij}) задается выражением

$$z_{ij} = \frac{1}{d_k}\begin{cases}(-1)^{i-j}\beta_{i-1}\beta_{k-j+1}, & \text{если } i \le j,\\ (-1)^{j-i}\beta_{j-1}\beta_{k-i+1}, & \text{если } i > j,\end{cases}$$

где

$$\beta_s = \frac{(2+\sqrt{3})^s + (2-\sqrt{3})^s}{2}, \quad d_k = 2\beta_k - \beta_{k-1}.$$

Тогда

$$\overline{\mathbf{X}}^{-1} = \frac{6}{T_0 d_k}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\beta_0\beta_k & -\beta_0\beta_{k-1} & \dots & (-1)^{-k}\beta_0^2\\ -\beta_0\beta_{k-1} & \beta_1\beta_{k-1} & \dots & (-1)^{1-k}\beta_0\beta_1\\ \dots & & & \\ (-1)^{-k}\beta_0^2 & (-1)^{1-k}\beta_0\beta_1 & \dots & \beta_0\beta_k\end{bmatrix}.$$

Таким образом, $\hat{\boldsymbol{\theta}}=\overline{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{Y}$ дает выражение для оценок неизвестных параметров. Здесь

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}\sum\limits_{t=1}^{T_0} x^2(t)\left(1-\frac{t}{T_0}\right)\\ \sum\limits_{t=1}^{T_0} x^2(t)\frac{t}{T_0} + \sum\limits_{t=T_0+1}^{2T_0} x^2(t)\left(2-\frac{t}{T_0}\right)\\ \dots\\ \sum\limits_{t=(k-1)T_0+1}^{kT_0} x^2(t)\left(\frac{t}{T_0}-k+1\right)\end{bmatrix}.$$

Исследуем статистические характеристики полученных оценок. Несмещенность полученных оценок вытекает из выражения (7). Ковариационная матрица оценок параметров тренда дисперсии, доставляемая выражением (8), зависит от неизвестных параметров θ_s, $s=\overline{0,k}$. Поэтому заменим неизвестные параметры θ_s, $s=\overline{0,k}$ на их оценки. Знание матрицы вариаций позволяет обычным способом строить доверительные интервалы для неизвестных параметров.

Выводы

Таким образом, в результате проведенных исследований:

1) на основе метода наименьших квадратов получены оценки параметров тренда дисперсии при пуассоновском потоке моментов измерений;
2) рассмотрены следующие частные случаи: линейный тренд, квадратичный и в виде сплайна первого порядка;
3) исследованы статистические характеристики полученных оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964. – 576 с.
2. Идрисов Ф.Ф. Выделение трендов временных рядов при наличии ошибок в измерениях моментов времени // Изв. вузов. Физика. – 1999. – Т. 42. – № 4. – С. 11–16.
3. Константинова И.Г. Выделение трендов временных рядов при случайном числе измерений сплайнами первого порядка // Математическое моделирование. Кибернетика. Информатика / под ред. А.М. Горцева. – Томск: Изд-во ТГУ, 1999. – С. 81–88.
4. Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. – М.: Наука, 1985. – 208 с.

Поступила 06.11.2012 г.