УДК 517

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ В СЛУЧАЕ НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОРЯДКОВ В ЛОКАЛЬНОМ ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ НА ОСНОВЕ *d*-ОПЕРАТОРА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Вводятся и рассматриваются свойства экспонент в дробном анализе нецелочисленных порядков. Показано, что для нецелочисленных порядков в разных случаях возможно вырождение различных степеней, когда для различных порядков имеется более одной экспоненты. Получено, что число экспонент для рациональных порядков конечно, а для иррациональных – бесконечно.

Ключевые слова:
Дробный анализ нецелочисленных порядков, дробный анализ целочисленных порядков, d-оператор, главная экспонента, дополнительные экспоненты, экспоненты вещественные, экспоненты комплексные, экспоненциальное вырождение.

Key words:
Fractional analysis of not-integral orders, fractional analysis of integral order, d-operator, main exponent, additional exponential functions, exponential functions of a real variable, exponential functions of a complex variable, exponential degeneration.

Введение

В стандартном анализе имеется одна экспонента с точностью до сложения аргумента с константой. Под экспонентой в стандартном анализе понимается функция инвариантная относительно операций дифференцирования и интегрирования, но последняя, с точностью до сложения с константой интегрирования.

В работе [1] для оператора Адамара была получена дробная экспонента любого конечного вещественного порядка s, названая в дальнейшем главной экспонентой

$$\exp_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}=$$
$$=\frac{x^{-1+s}}{\Gamma(s)}+\frac{x^{-1+2s}}{\Gamma(2s)}+\frac{x^{-1+3s}}{\Gamma(3s)}+\ldots \qquad (*)$$

Данная функция инвариантна относительно дифференцирования и интегрирования порядка s, но интегрирование с точностью до сложения с полиномом интегрирования $C_s(x)$. Данная инвариантность выполняется как для оператора Адамара, так и для локального d-оператора порядка s дробного интегродифференцирования [1]

$$d^{-s}x:\exp_s(x)=\exp_s(x);$$
$$d^{s}x:\exp_s(x)=\exp_s(x)+C_s(x).$$

Полиномы интегрирования определяются [1]

$$C_\alpha(x)=\begin{cases} C_0(x)=0;\alpha\in\mathbb{R};\alpha\le 0;\\ C_s(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^{-k+s};\ a_k=\text{const};\\ \qquad \alpha=s;\ s\ne 1,2,3,\ldots;\\ C_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m-1}a_k x^k;\ a_k=\text{const};\ \alpha=m;\ m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Здесь неопределённые коэффициенты a_k являются константами интегрирования, которых будет k в случае целочисленных порядков и бесконечное счётное множество для нецелочисленных порядков.

В работах [1, 2] было показано, что в локальном дробном анализе для каждого целочисленного порядка $k>1$ имеется более одной экспоненты, а именно k^2 экспонент. Среди экспонент одна – *главная экспонента*, а остальные – *дополнительные экспоненты*. Из всех k^2 экспонент k являются *основными*, вместе с главной экспонентой и $k-1$ *вещественными экспонентами*, а другие, k^2-k – *комплексные экспоненты*.

Наличие нескольких экспонент в целочисленном локальном дробном анализе называется *экспоненциальным вырождением*.

В случае нецелочисленных порядков экспоненциальное вырождение тоже имеет место. Для нецелочисленных порядков экспоненциальное вырождение имеет ряд особенностей, отличных от вырождения в случае целочисленных порядков.

Экспоненциальное вырождение нецелочисленных порядков

Рассмотрим первый из двух типов экспоненциального вырождения, которые были рассмотрены в случае целочисленных порядков [2].

Заменим в ряду дробной экспоненты порядков s(*) выражение ns на $ns-q+1$, где q – целое число, $q\ge 1$ и найдём её производную порядка s

$$d^{-s}x:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-q}}{\Gamma(ns-q+1)}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(ns-q+1)}{\Gamma((n-1)s-q+1)}\frac{x^{(n-1)s-q}}{\Gamma(ns-q+1)}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{(n-1)s-q}}{\Gamma((n-1)s-q+1)}.$$

Число $q\ge 1$ будем называть *сдвигом порядка*, а экспоненциальное вырождение, связанное с ним, будем называть *сдвиговым вырождением*.

При n=1 у первого элемента ряда после дифференцирования аргумент гамма-функции будет попадать в полюс, что будет приводить к тому, что первый элемент ряда будет обращаться в ноль, а у остальных порядок уменьшится на s. Переобозначив индекс m=n–1, получим ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{ms-q}}{\Gamma(ms-q+1)}$.

Найдём неопределённый интеграл порядка s данного ряда

$$d^s x:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-q}}{\Gamma(ns-q+1)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(ns-q+1)}{\Gamma((n+1)s-q+1)}\frac{x^{(n+1)s-q}}{\Gamma(ns-q+1)}+\tilde{C}_s(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{(n+1)s-q}}{\Gamma((n+1)s-q+1)}+\tilde{C}_s(x)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{ms-q}}{\Gamma(ms-q+1)}+C_s(x).$$

Здесь произведена замена индекса n+1=m, и сделано переобозначение полинома интегрирования в силу произвольности его коэффициентов

$$\tilde{C}_s(x)=\frac{x^{s-q}}{\Gamma(s-q+1)}+C_s(x).$$

Слагаемое $\frac{x^{s-q}}{\Gamma(s-q+1)}$ становится первым элементом (m=1) ряда после переобозначений.

Получили, что дробностепенные ряды $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{ms-q}}{\Gamma(ms-q+1)}$ порядка s инвариантны относительно дифференцирования и интегрирования порядка s. Результат интегрирования получается с точностью до сложения с полиномом интегрирования $C_s(x)$. Функции, задаваемые такими рядами, будем называть экспонентами порядка s.

Такие экспоненты порядка s могут существовать, когда ни один элемент ряда с n>1, и q>1 не обращается в ноль, что возможно, когда значения аргумента гамма-функции не попадают в её нули, которые определяются равенствами: ns–q+1=0,–1,–2,...

Рассмотрим случаи, когда порядок является рациональным s=r/p (r,p∈ℕ), тогда нули возможны при выполнении равенств

$$n=\frac{p(q-1)}{r},\frac{p(q-2)}{r},\frac{p(q-3)}{r},...$$

Для рациональных порядков всегда найдутся такие значения n>1 и q>1, когда будет выполняться хотя бы одно из возможных равенств. Поэтому сдвиговая инвариантность для рациональных порядков невозможна.

Если порядок s является иррациональным, то нули возможны при выполнении равенств

$$n=\frac{q-1}{s},\frac{q}{s},\frac{q-2}{s},\frac{q-3}{s},...$$

Для иррациональных порядков s и q>1 нет таких значений n>1, при которых эти равенства выполняются. Это значит, что сдвиговая инвариантность имеется для иррациональных порядков, причём степень этого вырождения будет бесконечной. Поэтому множество экспонент иррационального порядка со сдвиговым вырождением образуют бесконечное счётное множество в случае любых целых чисел q≥1.

Экспоненту с q=1 будем называть *главной экспонентой порядка s*, а остальные экспоненты с q>1 будем называть *дополнительными вещественными экспонентами* порядка s. Все эти экспоненты будем называть *основными экспонентами*, которые будут *вещественными функциями*.

Второй тип экспоненциального вырождения связан с правилами дробного дифференцирования функций, у которых аргумент умножается на константу α

$$d^{-s}x:\exp_s(\alpha x)=\alpha^s\exp_s(\alpha x);$$

$$d^s x:\exp_s(x)=\alpha^{-s}\exp_s(\alpha x)+C_s(x).$$

Инвариантность относительно дифференцирования и интегрирования здесь будет выполняться, если справедливо уравнение, которое называется уравнением инвариантности порядка s [2, 3]

$$\alpha^s=1.$$

Решения уравнения инвариантности порядка s будем называют корнями инвариантности и обозначать $\alpha_s^{\{h+1\}}\equiv\alpha_s^{\{l\}}$($l$=$h$+1;$h$=0,1,2,3,...), которые определяются формулой

$$\alpha_l=\alpha_{h+1}=1^{\frac{1}{s}}=\exp\left(\frac{i2\pi h}{s}\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{2\pi h}{s}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi h}{s}\right).$$

Здесь возможны два важных случая. Когда порядок s – рациональное число или иррациональное число.

Если s – рациональное, то его можно представить в виде s=r/p (r,p∈ℕ; p>1) , r и p не имеют общих делителей, неравных 1, тогда число корней инвариантности будет r.

Корень инвариантности $\alpha_s^{\{1\}}$=1, когда h=0, всегда равен 1, назван *главным корнем инвариантности*. Остальные корни инвариантности $\alpha_s^{\{h+1\}}\equiv\alpha_s^{\{l\}}$($h$=0,1,2,3,...) будем называть *комплексными корнями инвариантности*. Комплексные корни инвариантности в частном случае могут быть мнимыми или действительными.

Введённые обозначения корней инвариантности выбраны для согласования с нумерацией экспонент целочисленных порядков [2, 3].

Таким образом, для нецелочисленных порядков при вырождении корней инвариантности имеется одна вещественная экспонента, она же – главная экспонента (*), при h=0, а остальные – *дополнительные комплексные экспоненты*.

В случае ветвей дробного анализа рациональных порядков экспоненциальное вырождение, связанное с корнями инвариантности, даёт конечное число комплексных экспонент, а для ветвей с иррациональными порядками – бесконечное счётное множество комплексных экспонент.

Возможны различные способы обозначения всех экспонент нецелочисленных порядков s, которые в общем случае можно записать, при условии, что $q,l\in\mathbb{N}$; $l=h+1$

$$\exp_s^{\{q|l\}}(x)\equiv\exp_s^{\{q\}}(\alpha_s^{\{l\}}x)\equiv$$
$$\equiv\exp_s^{\{q|h+1\}}(x)\equiv\exp_s^{\{q\}}(\alpha_s^{\{h+1\}}x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{ns-q}}{\Gamma(ns-q+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{(m+1)s-q}}{\Gamma((m+1)s-q+1)}=$$
$$=\frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{s-q}}{\Gamma(s-q+1)}+\frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{2s-q}}{\Gamma(2s-q+1)}+\frac{(\alpha_s^{\{l\}}x)^{3s-q}}{\Gamma(3s-q+1)}+\ldots$$

При вырождении, связанном с корнями инвариантности, возможны три частных случая.

1. Когда порядки рациональные и равны $s=1/p$, то нет сдвигового вырождения, и нет вырождения корней инвариантности (имеется один корень инвариантности $\alpha_{\frac{1}{p}}^{\{1\}}=1$). Тогда для каждого порядка $s=1/p$ будет только одна, главная экспонента ($q=l=1$)

$$\exp_{\frac{1}{p}}(x)\equiv\exp_{\frac{1}{p}}^{\{1\}}(x)\equiv\exp_{\frac{1}{p}}^{\{1|1\}}(x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)\frac{1}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{p}\right)}=$$
$$=\frac{x^{\frac{1}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}+\frac{x^{\frac{2}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)}+\frac{x^{\frac{3}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)}+\frac{x^{\frac{4}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{4}{p}\right)}+\ldots$$

2. В случае рациональных порядков $s=r/p$ ($r>1$) нет сдвигового вырождения, и имеется r корней инвариантности. Тогда степень вырождения экспонент в этом случае будет равна r и их можно записать в виде ряда, где $l=1,2,3,...r$; $l=h+1$

$$\exp_{\frac{r}{p}}^{\{1|l\}}(x)\equiv\exp_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)\equiv$$
$$\equiv\exp_{\frac{r}{p}}^{\{1|h+1\}}(x)\equiv\exp_{\frac{r}{p}}^{\{q\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}}x\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)^{n\frac{r}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{nr}{p}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)^{(m+1)\frac{r}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{(m+1)r}{p}\right)}=$$
$$=\frac{\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)^{\frac{r}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{r}{p}\right)}+\frac{\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)^{\frac{2r}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{2r}{p}\right)}+\frac{\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)^{\frac{3r}{p}-1}}{\Gamma\left(\frac{3r}{p}\right)}+\ldots$$

Здесь каждому значению l будет соответствовать отдельная экспонента. Все эти экспоненты можно представить в виде вектора

$$\mathbf{exp}_{\frac{r}{p}}^{\{1|l\}}(x)\equiv\mathbf{exp}_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{l\}}x\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}\exp_{\frac{r}{p}}^{\{1|1\}}(x) & \exp_{\frac{r}{p}}^{\{1|2\}}(x) & \ldots & \exp_{\frac{r}{p}}^{\{1|r\}}(x)\end{pmatrix}=$$
$$=\left(\exp_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}x\right)\ \exp_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{2\}}x\right)\ \ldots\ \exp_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{r\}}x\right)\right).$$

3. Когда порядок $s=\lambda$ иррациональный, то имеется бесконечное вырождение корней инвариантности бесконечное сдвиговое вырождение и $q=1,2,3,...$; $l=1,2,3,...$; $l=h+1$

$$\exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x)\equiv\exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)\equiv$$
$$\equiv\exp_{\lambda}^{\{q|h+1\}}(x)\equiv\exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{h+1\}}x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{n\lambda-q}}{\Gamma(n\lambda-q+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{(m+1)\lambda-q}}{\Gamma((m+1)\lambda-q+1)}=$$
$$=\frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{\lambda-q}}{\Gamma(\lambda-q+1)}+\frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{2\lambda-q}}{\Gamma(2\lambda-q+1)}+\frac{(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)^{3\lambda-q}}{\Gamma(3\lambda-q+1)}+\ldots$$

Здесь каждой паре значений q и l будет соответствовать отдельная экспонента. Все эти экспоненты можно представить в виде матрицы с бесконечным числом строк и столбцов

$$\mathbf{exp}_{\lambda}^{\{q|l\}}(x)\equiv\mathbf{exp}_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x)=$$
$$=\begin{pmatrix}\exp_{\lambda}^{\{1|1\}}(x) & \exp_{\lambda}^{\{1|2\}}(x) & \ldots & \exp_{\lambda}^{\{1|l\}}(x) & \ldots\\ \exp_{\lambda}^{\{2|1\}}(x) & \exp_{\lambda}^{\{2|2\}}(x) & \ldots & \exp_{\lambda}^{\{2|l\}}(x) & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \exp_{\lambda}^{\{q|1\}}(x) & \exp_{\lambda}^{\{q|2\}}(x) & \ldots & \exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x) & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\exp_{\lambda}^{\{1\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x) & \exp_{\lambda}^{\{1\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \ldots & \exp_{\lambda}^{\{1\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \ldots\\ \exp_{\lambda}^{\{2\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x) & \exp_{\lambda}^{\{2\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \ldots & \exp_{\lambda}^{\{2\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{1\}}x) & \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \ldots & \exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{l\}}x) & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{pmatrix}.$$

Полученные экспоненты $\exp_s^{\{q|l\}}(x)$ нецелочисленного порядка s инвариантны относительно дробного интегродифференцирования порядка s, а относительно интегрирования, как обычно, с точностью до сложения экспонент с полиномом интегрирования $C_s(x)$

$$d^{-s}x:\exp_s^{\{q|l\}}(x)=\exp_s^{\{q|l\}}(x);$$
$$d^{s}x:\exp_s^{\{q|l\}}(x)=\exp_s^{\{q|l\}}(x)+C_s(x).$$

При сдвиговом вырождении экспоненты связаны между собой через дифференцирование и интегрирование целочисленного порядка $b\le q+1$. В этом случае при дифференцировании сдвиг q уменьшается на b, а при интегрировании увеличивается на b

$$d^{-b}x:\exp_s^{\{q|l\}}(x)=\exp_s^{\{q+b|l\}}(x);$$
$$d^{b}x:\exp_s^{\{q|l\}}(x)=\exp_s^{\{q-b|l\}}(x)+C_s(x).$$

Это легко показать

$$d^{\pm b}x:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-q}}{\Gamma(ns-q\pm 1+1)}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(ns-q+1)}{\Gamma(ns-q\pm b+1)}\frac{x^{ns-q\pm b}}{\Gamma(ns-q+1)}+C_s(x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-q\pm 1}}{\Gamma(ns-q\pm b+1)}+C_s(x).$$

Отсюда следует, что соседние элементы ряда переходят друг в друга при дифференцировании и интегрировании порядка 1.

Инвариантные функции

Экспоненциальное вырождение в локальном дробном анализе приводит к возможности введения инвариантных функций, которые были рассмотрены для целочисленных порядков [1, 2].

Рассмотрим инвариантные функции нецелочисленных порядков.

Определение. Функцию, инвариантную относительно дифференцирования порядка s и инвариантную относительно интегрирования порядка s, причём интегрирование с точностью до сложения с полиномом интегрирования порядка s, будем называть *инвариантной функцией порядка s* [1, 2].

Тривиальным случаем инвариантной функции для любого вещественного порядка является нулевая функция (ноль).

Очевидно, что всё функции, пропорциональные экспонентам порядка s, являются инвариантными функциями того же порядка, которые будем называть *простыми инвариантными функциями* порядка s.

Определение. Инвариантную функцию порядка s будем называть *сложной инвариантной функцией* порядка s, если она состоит из суперпозиции более чем одной экспоненты порядка s.

Суперпозиция экспонент нецелочисленного рационального порядка $s=r/p$ будет *сложной инвариантной функцией* порядка s, которую без учёта сдвигов можно записать

$$\mathrm{Invf}_{\frac{r}{p}}\left(a_l,\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}};x\right)=\sum_{l=1}^{r}a_l\exp_{\frac{r}{p}}^{\{1|l\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}x\right)\equiv$$
$$\equiv\sum_{h=0}^{r-1}a_l\exp_{\frac{r}{p}}^{\{1\}}\left(\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}}x\right).$$

Здесь $\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}}$ – корни инвариантности порядка r/p; a_l – произвольные коэффициенты разложения, $a_l,\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}}=\mathrm{const};\ a_l,\alpha_{\frac{r}{p}}^{\{h+1\}}\in\mathbb{C};\ l=1,2,3,\ldots r;\ l\in\mathbb{N};\ l=h+1.$

Такие функции будем называть *экспоненциальными полиномами порядка r/p*.

Для частных случаев порядков $s=1/p$, когда отсутствует экспоненциальное вырождение, инвариантная функция будет простой и будет состоять из одного слагаемого

$$\mathrm{Invf}_{\frac{1}{p}}(a;x)=a\exp_{\frac{1}{p}}(x);\quad a\in\mathbb{C};\ a=\mathrm{const}.$$

В случае стандартного анализа, когда порядок $s=1$, инвариантные функции тоже будет состоять из одного слагаемого

$$\mathrm{Invf}_1(a;x)=a\exp_1(x+\beta);\quad a,\ \beta\in\mathbb{C};\ a,\ \beta=\mathrm{const}.$$

Здесь для общности добавлен сдвиг аргумента β, который тоже сохраняет инвариантность функций при интегродифференцировании порядка 1.

В случае иррационального порядка s суперпозиция бесконечного числа экспонент порядка s будет образовывать ряд, который будем называть *рядом экспонент порядка s*

$$\mathrm{Invf}_{\lambda}(a_{q,l},\alpha_{\lambda}^{\{q|l\}};x)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{q,l}\exp_{\lambda}^{\{q|l\}}(x)\equiv$$
$$\equiv\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{q,l}\exp_{\lambda}^{\{q\}}(\alpha_{\lambda}^{\{h+1\}}x).$$

Здесь $a_{q,l}$ – произвольные коэффициенты разложения, $a_{q,l},\alpha_{\lambda}^{\{q|l\}}=\mathrm{const}$; $a_{q,l},\alpha_{\lambda}^{\{q|l\}}\in\mathbb{C}$; $q,l=1,2,3,\ldots,\infty$; $l=h+1$.

Условия инвариантности для функций $\mathrm{Invf}_s(a_l,\alpha_s^{\{q|l\}};x)$ будут

$$d^{-s}x:\mathrm{Invf}_s(a_l,\alpha_s^{\{q|l\}};x)=\mathrm{Invf}_s(a_l,\alpha_s^{\{q|l\}};x);$$
$$d^{s}x:\mathrm{Invf}_s(a_l,\alpha_s^{\{q|l\}};x)=\mathrm{Invf}_s(a_l,\alpha_s^{\{q|l\}};x)+C_s(x).$$

Из сказанного справедлива теорема.

Теорема. Любая линейная комбинация инвариантных функций порядка s является инвариантной функцией порядка s.

Инвариантные функции образуют *пространство инвариантных функций порядка s*, которое будем обозначать IF_s.

Определение. Размерностью пространства IF_s будем называть степень экспоненциального вырождения порядка s и обозначать $\dim\mathrm{IF}_s$.

Размерность пространства инвариантных функций рационального порядка r/p будет r, или $\dim\mathrm{IF}_{\frac{r}{p}}=r;\quad r,\ p=1,2,3,\ldots$

В частности, для порядков $1/p$, когда отсутствует экспоненциальное вырождение, будет $\dim\mathrm{IF}_{\frac{1}{p}}=1;\quad p=1,2,3,\ldots$

Если порядок λ – число иррациональное, то $\dim\mathrm{IF}_{\lambda}=\infty$.

Из сказанного следует утверждение.

Теорема. Все экспоненты нецелочисленных порядков s образуют линейно независимую систему функций, которая образует линейное пространство размерности 1, когда $s=1/p$, линейное пространство размерности $r<\infty$, если $s=r/p$ и бесконечномерное линейное пространство, если порядок s является иррациональным числом.

Элементами данного линейного пространства являются инвариантные функции порядка s.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
2. Чуриков В.А. Экспоненты в дробном анализе целочисленных порядков на основе *d*-оператора // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 16–20.
3. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.

Поступила 28.06.2012 г.

УДК 517.3

ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ БИНОМИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЛОКАЛЬНОМ ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Рассмотрено дробное интегродифференцирование биномиальных разложений в локальном дробном анализе на основе d-оператора.

Ключевые слова:
Дробный анализ, d-оператор, биномиальное разложение.
Key words:
Fractional analysis, d-operator, binomial decomposition.

В стандартном анализе справедлива формула дифференцирования степенных рядов в окрестности центра $a\in\mathbb{R}$; $a=\text{const}<\infty$

$$d^{-1}x:\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x\pm a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}nb_n(x\pm a)^{n-1};b_n=\text{const}<\infty.$$

Эта формула часто используется в дробном анализе для дифференцирования нецелочисленных порядков, например [1].

Но при простом распространении данной формулы на случай дробных производных она уже не является справедливой. Покажем это на простом примере для второго члена разложения ряда.

Найдём производную нецелочисленного порядка s с помощью локального d-оператора [2], когда скобки не раскрываются, тогда по формуле можно записать

$$d^{-s}x:(x\pm a)^2=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-s+1)}(x\pm a)^{2-s}. \qquad (1)$$

Здесь $\Gamma(...)$ – гамма-функция Эйлера.

Найдём производную такого же порядка, но уже раскрыв скобки

$$d^{-s}x:(x\pm a)^2=d^{-s}x:(x^2+2ax+a^2)=$$
$$=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-s+1)}x^{2-s}\pm 2a\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-s+1)}x^{1-s}+$$
$$+a^2\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(-s+1)}x^{0-s}.$$

Полученные результаты не равны между собой, если $a\neq 0$. Последний полученный результат является правильным. Из этого следует, что в дробном анализе формула дифференцирования степенных рядов (1), обобщающая формулу стандартного анализа, не применима в дробном анализе.

Поэтому имеет смысл получить для дробного анализа общие формулы интегродифференцирования дробных порядков биномиальных разложений как для случаев с целочисленными порядками, так и с нецелочисленными порядками разложения.

Для целочисленных порядков m справедливо разложение

$$(x\pm a)^m=\sum_{n=0}^{n=m}(\pm 1)^n\binom{m}{n}a^n x^{m-n}=$$
$$=\sum_{n=0}^{n=m}(\pm 1)^n a^n\frac{m!}{n!(m-n)!}x^{m-n};$$
$$\binom{m}{n}=\frac{n!}{m!(n-m)!};m,n\in\mathbb{N};\ m\geq n\geq 0.$$

Здесь $\binom{m}{n}$ – биномиальные коэффициенты, которые в общем случае вещественных коэффициентов будут

$$\binom{a}{b}=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b-a+1)};a,b\in\mathbb{R}.$$

Когда показатель степени $q>0$, $q\neq 1,2,3,...$ не является целочисленным, будет справедливо разложение в ряд, сходящийся для значений, когда выполняются условия: $-1<x\pm a<1$; $a\neq 0$