

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХФАЗНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

М.Ю. Пустоветов

Ростовский государственный университет путей сообщения, г. Ростов-на-Дону

E-mail: mgsn2006@rambler.ru

Разработана математическая модель трёхфазного трансформатора, позволяющая описать электромагнитные процессы в трансформаторах с группами соединения обмоток 0, 5, 6, 11. Особо рассмотрен случай с группой соединения 7. Показаны результаты моделирования напряжений и токов трансформатора при питании от автономного инвертора напряжения.

**Ключевые слова:**

Трёхфазный трансформатор, группа соединения, математическая модель, напряжение.

**Key words:**

3-phase transformer, group of connection, mathematical model, voltage.

Трёхфазный трансформатор является одним из самых распространённых элементов силовых электрических схем. Для анализа режимов работы электротехнических устройств и энергетических систем с трансформатором целесообразно использование математического моделирования.

В [1] дана математическая модель (ММ) трёхфазного группового трансформатора для случая соединения обмоток по схеме  $\Delta Y_0$ . В групповой конструкции, в отличие от конструкции с общим для трёх фаз магнитопроводом, не учитывается магнитная связь между фазами ввиду её существенного ослабления. Таким образом, эта ММ не описывает наиболее распространённый случай, когда фазы трансформатора выполнены на одном магнитопроводе. Также в ней не учтены потери в стали.

В [2] использована ММ трёхфазного трансформатора со схемой соединения обмоток  $Y/\Delta$  в предположении, что в этом случае, так как отсутствуют токи нулевой последовательности, каждую фазу трёхфазного трансформатора можно рассматривать независимо от другой, то есть как однофазный трансформатор, в том числе при несимметричной нагрузке. То есть структура уравнений ММ аналогична использованной в [1]. Потери в стали трансформатора в [2] учитываются.

При создании универсальной ММ силовых трёхфазных трансформаторов и автотрансформаторов авторы [3] приняли решение пренебречь электромагнитным взаимодействием обмоток разных фаз и учитывать взаимодействие обмоток каждой фазы только с собственными магнитными потоками рассеивания и основным магнитным потоком своей фазы. Решение мотивировано несущественностью ущерба от него точности воспроизведения электромагнитных процессов. Варианты схем соединения обмоток ограничены сочетаниями  $\Delta$ ,  $Y$  и  $Y_0$ . О возможных группах соединения не сообщается, как и в [1, 2].

Одним из вариантов ММ трёхфазного трансформатора в программном пакете *SIMULINK* является *Three-Phase Transformer Inductance Matrix Type (Two Windings)* [4]. Эта ММ описывает именно случай, когда фазы трансформатора выполнены на одном магнитопроводе. Учтены потери в стали. В качестве возможных схем и групп соединения

обмоток заявлены:  $Y_0/Y-0$ ,  $Y_0/\Delta-1$ ,  $Y_0/\Delta-11$ ,  $\Delta/Y_0-1$ ,  $\Delta/Y_0-11$ .

Другая ММ трёхфазного трансформатора из пакета *SIMULINK*, именуемая *Three-Phase Transformer 12 Terminals* [5], позволяет соединять выводы обмоток фаз произвольным образом, в том числе получать все 12 групп соединений. Но составлена эта ММ из трёх моделей однофазных трансформаторов, то есть, строго говоря, не пригодна для описания трёхфазного трансформатора с единым магнитопроводом.

Задачей исследования в данной работе является разработка такой ММ трёхфазного трансформатора с единым магнитопроводом, в которой бы учитывались потери в стали, и была бы возможность произвольного соединения выводов обмоток. В том числе возможность получения различных групп соединений при разнообразных сочетаниях схем соединения обмоток  $\Delta$ ,  $Y$  и  $Y_0$ .

За ММ трёхфазного трансформатора взяты электромагнитные уравнения обобщённой электрической машины в трёхфазных заторможенных координатах  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  [6]. После ряда преобразований уравнения ММ трёхфазного трансформатора (фазы  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , принадлежность к которым отмечена нижними индексами) записываются в виде [7]:

$$\begin{cases} u_{a1} - r_{a1}i_{a1} - L_{ya1} \frac{di_{a1}}{dt} = u_{a01}; \\ u_{b1} - r_{b1}i_{b1} - L_{yb1} \frac{di_{b1}}{dt} = u_{b01}; \\ u_{c1} - r_{c1}i_{c1} - L_{yc1} \frac{di_{c1}}{dt} = u_{c01}; \\ e_{a2} - r_{a2}i_{a2} = u_{a2}; \\ e_{b2} - r_{b2}i_{b2} = u_{b2}; \\ e_{c2} - r_{c2}i_{c2} = u_{c2}, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{cases} e_{a1} = -\left(u_{a01} + L_{ya1} \frac{di_{a1}}{dt}\right); \\ e_{b1} = -\left(u_{b01} + L_{yb1} \frac{di_{b1}}{dt}\right); \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e_{c1} &= -\left(u_{c01} + L_{yc1} \frac{di_{c1}}{dt}\right); \\ e_{a2} &= \mp \left(\frac{w_2}{w_1} u_{a01} + L_{ya2} \frac{di_{a2}}{dt}\right); \\ e_{b2} &= \mp \left(\frac{w_2}{w_1} u_{b01} + L_{yb2} \frac{di_{b2}}{dt}\right); \\ e_{c2} &= \mp \left(\frac{w_2}{w_1} u_{c01} + L_{yc2} \frac{di_{c2}}{dt}\right). \end{aligned}$$

Здесь  $u$  – фазное напряжение, В;  $i$  – фазный ток, А;  $L_\sigma$  – индуктивность рассеяния фазы обмотки, Гн;  $r$  – активное сопротивление фазы обмотки, Ом;  $w$  – количество витков в фазе обмотки. Индексы 1 обозначают принадлежность к первичной обмотке трансформатора, а индексы 2 – ко вторичной.  $e_{a1}$ ,  $e_{b1}$ ,  $e_{c1}$ ,  $e_{a2}$ ,  $e_{b2}$  и  $e_{c2}$  – ЭДС фаз первичной и вторичной обмоток [8].

Для каждой из фаз падение напряжения в ветви намагничивания первичной обмотки при последовательном соединении главной индуктивности  $L_m$  и сопротивления  $r_m$  потерь в стали:

$$\begin{aligned} u_{a01} = -e_{a01} &= L_m(i_{\mu a}) \frac{2}{3} \left[ \begin{aligned} &\left(\frac{di_{a1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{a2}}{dt}\right) - \\ &-\frac{1}{2} \left( \left(\frac{di_{b1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{b2}}{dt}\right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{di_{c1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{c2}}{dt}\right) \right) \end{aligned} \right] + \\ &+ r_m \frac{2}{3} \left[ \begin{aligned} &\left(i_{1a} + \frac{w_2}{w_1} i_{1a2}\right) - \\ &-\frac{1}{2} \left( \left(i_{1b} + \frac{w_2}{w_1} i_{1b2}\right) + \right. \\ &\left. + \left(i_{1c} + \frac{w_2}{w_1} i_{1c2}\right) \right) \end{aligned} \right] = L_m(i_{\mu a}) \frac{di_{\mu a}}{dt} + r_m i_{\mu a}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u_{b01} = -e_{b01} &= L_m(i_{\mu b}) \frac{2}{3} \left[ \begin{aligned} &\left(\frac{di_{b1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{b2}}{dt}\right) - \\ &-\frac{1}{2} \left( \left(\frac{di_{a1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{a2}}{dt}\right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{di_{c1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{c2}}{dt}\right) \right) \end{aligned} \right] + \\ &+ r_m \frac{2}{3} \left[ \begin{aligned} &\left(i_{1b} + \frac{w_2}{w_1} i_{1b2}\right) - \\ &-\frac{1}{2} \left( \left(i_{1a} + \frac{w_2}{w_1} i_{1a2}\right) + \right. \\ &\left. + \left(i_{1c} + \frac{w_2}{w_1} i_{1c2}\right) \right) \end{aligned} \right] = L_m(i_{\mu b}) \frac{di_{\mu b}}{dt} + r_m i_{\mu b}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_{c01} = -e_{c01} &= L_m(i_{\mu c}) \frac{2}{3} \left[ \begin{aligned} &\left(\frac{di_{c1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{c2}}{dt}\right) - \\ &-\frac{1}{2} \left( \left(\frac{di_{a1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{a2}}{dt}\right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{di_{b1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{b2}}{dt}\right) \right) \end{aligned} \right] + \\ &+ r_m \frac{2}{3} \left[ \begin{aligned} &\left(i_{1c} + \frac{w_2}{w_1} i_{1c2}\right) - \\ &-\frac{1}{2} \left( \left(i_{1a} + \frac{w_2}{w_1} i_{1a2}\right) + \right. \\ &\left. + \left(i_{1b} + \frac{w_2}{w_1} i_{1b2}\right) \right) \end{aligned} \right] = L_m(i_{\mu c}) \frac{di_{\mu c}}{dt} + r_m i_{\mu c}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $i_\mu$  – ток в ветви намагничивания фазы трансформатора.

Согласно [9], в основе теории групп соединений лежат векторные диаграммы трансформатора при холостом ходе, построенные по практической системе векторных обозначений. Исходя из неё, знак «+» в выражениях для  $e_{a2}$ ,  $e_{b2}$  и  $e_{c2}$  соответствует случаю, когда первичная и вторичная обмотки на одном стержне расположены и навиты одинаково. Знак «-» соответствует случаю встречного направления намотки катушек или перемены начала и конца одной из обмоток относительно другой. Знак «+» нужно использовать для получения групп соединений  $\Delta/Y-11$ ,  $Y/Y-0$ ,  $\Delta/\Delta-0$ , а «-» – для  $\Delta/Y-5$ ,  $Y/Y-6$ ,  $\Delta/\Delta-6$ . Вместо схемы  $Y$  может быть использована  $Y_0$ .

Описанная ММ трёхфазного трансформатора применима для конструкции с общим для всех фаз сердечником, в том числе при несимметрии питающих напряжений, несимметрии параметров фаз обмоток трансформатора (при условии одинаковости для всех фаз  $L_m$  и  $r_m$ ) и несимметрии нагрузки. Учитывается насыщение магнитной цепи от основного магнитного потока. В трансформаторе (для простоты рассматриваем стержневой магнитопровод) основной магнитный поток каждой фазы проходит по своему стержню. В ММ трансформатора уместно пользоваться для каждой фазы своим током намагничивания, т. е. тремя зависимостями  $L_m(I_{\mu a})$ ,  $L_m(I_{\mu b})$ ,  $L_m(I_{\mu c})$  [10]. Именно такой подход позволяет корректно учесть особенности гармонического состава напряжений и токов фаз при различных вариантах схем соединения обмоток [8].

Результаты моделирования установившегося режима работы трансформатора мощностью 240 кВА с соединением обмоток по схеме  $\Delta/Y-11$  при питании от автономного инвертора напряжения (АИН) по схеме, рис. 1 (диоды защиты транзисторов на рисунке не показаны), приведены на рис. 2. Они хорошо совпадают с теоретическими диаграммами напряжений, рис. 3, выполненными согласно [11]. Некоторые различия в формах напряжений вторичной обмотки обусловлены влия-

нием падения напряжения ввиду протекания тока нагрузки в случае на рис. 2, тогда как на рис. 3 показан режим холостого хода.

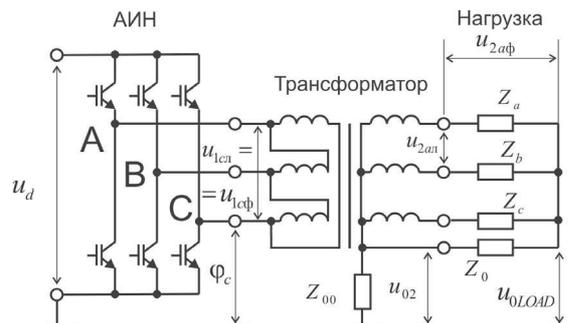


Рис. 1. Электрическая принципиальная схема включения трёхфазного трансформатора питания собственных нужд электровоза

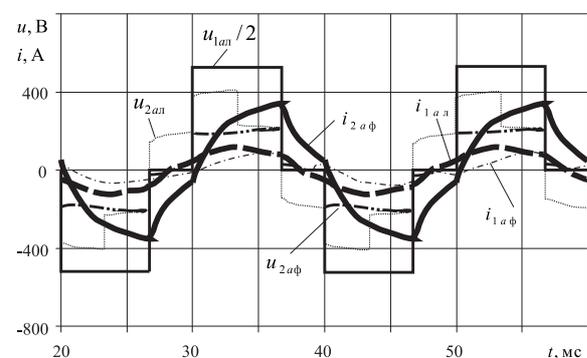


Рис. 2. Результаты моделирования токов и напряжений трансформатора 240 кВА Δ/Y-11

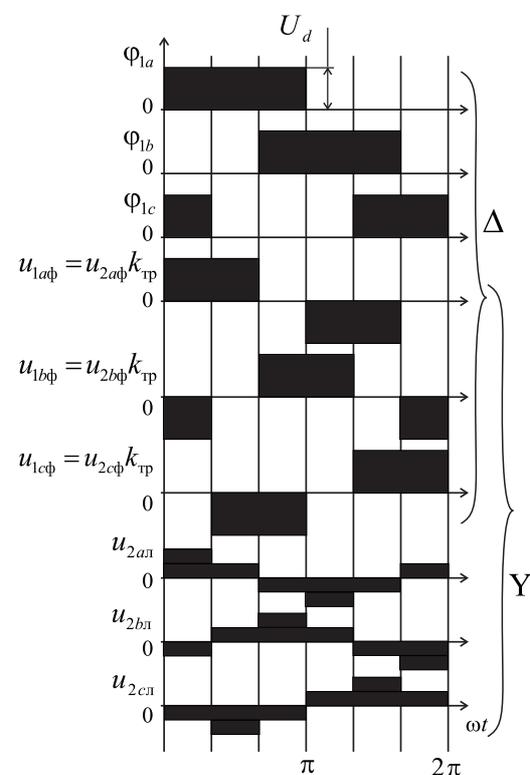


Рис. 3. Теоретические диаграммы напряжений при питании трансформатора Δ/Y-11 от двухуровневого АИН

На рис. 3 приняты обозначения:  $\varphi_1$  – потенциал входной клеммы соответствующей фазы первичной обмотки относительно земли;  $k_{тр}$  – фазный коэффициент трансформации.

Несколько сложнее дело обстоит при составлении ММ для других стандартных групп соединений трёхфазных трансформаторов, т. к. в этих случаях происходит перестановка фаз вторичной обмотки относительно первичной. Таков, например, случай Δ/Y-7, который используется в трёхфазном трансформаторе Т-164, предназначенном для гальванического разделения и преобразования напряжения канала блока питания вспомогательных цепей в напряжение питания потребителей собственных нужд электровоза. Для корректного получения токов и напряжений здесь требуется видоизменение выражений (2)–(4) путём замены фазных индексов  $a, b, c$  при токах вторичной обмотки и их производных соответственно на  $b, c, a$ .

$$u_{a01} = -e_{a01} = L_m(i_{ма}) \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{di_{a1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{b2}}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{di_{b1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{c2}}{dt} \right) + \left( \frac{di_{c1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{a2}}{dt} \right) \right) \right] + r_m \frac{2}{3} \left[ \left( i_{a1} + \frac{w_2}{w_1} i_{b2} \right) - \frac{1}{2} \left( \left( i_{b1} + \frac{w_2}{w_1} i_{c2} \right) + \left( i_{c1} + \frac{w_2}{w_1} i_{a2} \right) \right) \right]$$

$$u_{b01} = -e_{b01} = L_m(i_{mb}) \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{di_{b1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{c2}}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{di_{a1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{b2}}{dt} \right) + \left( \frac{di_{c1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{a2}}{dt} \right) \right) \right] + r_m \frac{2}{3} \left[ \left( i_{b1} + \frac{w_2}{w_1} i_{c2} \right) - \frac{1}{2} \left( \left( i_{a1} + \frac{w_2}{w_1} i_{b2} \right) + \left( i_{c1} + \frac{w_2}{w_1} i_{a2} \right) \right) \right]$$

$$u_{c01} = -e_{c01} = L_m(i_{mc}) \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{di_{c1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{a2}}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{di_{a1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{b2}}{dt} \right) + \left( \frac{di_{b1}}{dt} + \frac{w_2}{w_1} \frac{di_{c2}}{dt} \right) \right) \right] + r_m \frac{2}{3} \left[ \left( i_{c1} + \frac{w_2}{w_1} i_{a2} \right) - \frac{1}{2} \left( \left( i_{a1} + \frac{w_2}{w_1} i_{b2} \right) + \left( i_{b1} + \frac{w_2}{w_1} i_{c2} \right) \right) \right]$$

Иначе говоря, такая замена индексов фаз производится при вводе сигналов с ММ вторичной обмотки в ММ первичной обмотки. Кроме этого, необходимо в комментариях к системе уравнений (1) произвести следующие замены:

$$e_{a2} = \left( \frac{w_2}{w_1} u_{c01} + L_{ya2} \frac{di_{a2}}{dt} \right);$$

$$e_{b2} = \left( \frac{w_2}{w_1} u_{a01} + L_{yb2} \frac{di_{b2}}{dt} \right);$$

$$e_{c2} = \left( \frac{w_2}{w_1} u_{b01} + L_{yc2} \frac{di_{c2}}{dt} \right).$$

То есть индексы при падении напряжения в ветви намагничивания первичной обмотки каждой фазы  $u_{01}$  заменены: в фазе  $a$  на  $c$ , в фазе  $b$  на  $a$ , в фазе  $c$  на  $b$ . Здесь имеет место ввод сигналов с ММ первичной обмотки в ММ вторичной обмотки, чем и объясняется обратная замена индексов фаз:  $b, c, a$  при  $u_{01}$  соответственно на  $a, b, c$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сипайлов Г.А., Лоос А.В. Математическое моделирование электрических машин (АВМ). – М.: Высшая школа, 1980. – 176 с.
2. Воронин А.В., Грапов А.В., Ермоленко А.В., Ивлев В.А. Использование программы моделирования аналоговых устройств SPICE для расчёта участка электроснабжения переменного тока // Новое в хозяйстве электроснабжения: Сб. науч. тр. / под ред. А.Б. Косарева. – М.: Интекст, 2003. – С. 76–85.
3. Гусев А.С., Свечкарёв С.В., Плодистый И.Л. Универсальная математическая модель трёхфазных трансформаторов и автотрансформаторов // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 311. – № 4. – С. 77–81.
4. Three-Phase Transformer Inductance Matrix Type (Two Windings). 2012. URL: <http://www.mathworks.com/help/toolbox/physmod/powersys/ref/threephasetransformerinductancematrixtypetwoundings.html> (дата обращения: 06.04.2012).
5. Three-Phase Transformer 12 Terminals. 2012. URL: <http://www.mathworks.com/help/toolbox/physmod/powersys/ref/threephasetransformer12terminals.html> (дата обращения: 06.04.2012).

Отметим, что при отладке модели в смысле соответствия группе соединения, следует проверять результаты в режиме холостого хода трансформатора по фазовым сдвигам напряжений первичной и вторичной обмоток, а также результаты в режиме работы под нагрузкой для оценки соотношения тока первичной обмотки и приведённого тока во вторичной обмотке.

#### Выводы

1. Разработана математическая модель трёхфазного трансформатора с единым магнитопроводом, позволяющая учитывать потери в стали. Учёт нелинейности кривой намагничивания производится индивидуально для каждой фазы.
2. Достоинствами разработанной модели являются возможность ее настройки для получения различных стандартных групп соединений обмоток и использование при произвольной схеме соединений обмоток.

6. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин. – М.: Высшая школа, 1994. – 318 с.
7. Пехотский И.В., Пустоветов М.Ю., Пустоветова С.Ю. Моделирование электромагнитных процессов в трансформаторах // Вестник ВЭЛНИИ. – 2004. – № 2. – С. 78–85.
8. Вольдек А.И. Электрические машины. – Л.: Энергия, 1974. – 840 с.
9. Булгаков Н.И. Группы соединения трансформаторов. 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1977. – 81 с.
10. Пустоветов М.Ю., Пехотский И.В. Способ учёта нелинейности кривой намагничивания при переменной частоте питающего напряжения // Вестник ВЭЛНИИ. – 2004. – № 1. – С. 239–249.
11. Ротанов Н.А., Курбасов А.С., Быков Ю.Г., Литовченко В.В. Электроподвижной состав с асинхронными тяговыми двигателями. – М.: Транспорт, 1991. – 336 с.

Поступила 09.04.2012 г.