

УДК 550.831.01

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И ГЕОДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Ю.В. Пятаков, В.И. Исаев*, В.Ю. Косыгин**

Воронежский государственный университет инженерных технологий

*Томский политехнический университет

**Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск

E-mail: pyatakovjv@mail.ru

Приведены алгоритмы решения задачи определения составляющих гравитационного и геодинамического полей для трехмерных неоднородных сред. Для аппроксимации плотностной и реологической структуры среды используются типовые элементы – вертикальные треугольные призмы с произвольными верхним и нижним основаниями. Получено новое аналитическое решение прямой задачи гравиметрии для типового элемента с плотностью, меняющейся с глубиной по линейному закону. Выполнена математическая постановка и приведено общее решение задачи определения напряжений и мгновенных скоростей смещения неоднородной вязкой среды под действием гравитационного поля Земли. Решение определено с использованием гидродинамических потенциалов объемного, простого и двойного слоя. Показано, что для численного расчета таких потенциалов оптимально использовать теорию и типовую технику решения прямых задач гравитационного потенциала. Устойчивость, точность и быстродействие разработанных алгоритмов демонстрируется расчетами тестовых примеров.

Ключевые слова:

Теория потенциала, прямые задачи гравиметрии и геодинамики, алгоритмы.

Key words:

Potential theory, direct gravity and geodynamics problem, algorithms.

Введение

Фундаментальной основой методов гравиметрии является теория потенциала, первоначально понимаемая как учение о свойствах сил, действующих по закону всемирного тяготения. В дальнейшем в работах К.Ф. Гаусса, Ж.Л. Лагранжа, П.С. Лапласа, Д. Грина, Ж.А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова методы теории потенциала были распространены не только на решение задач теории тяготения, но и на решение широкого круга задач математической физики.

В настоящее время теория потенциала является мощным и универсальным инструментом, широко используемым при решении задач интерпретации геофизических полей. Одним из примеров такого использования является известное соотношение Пуассона, устанавливающее связь между решениями прямых задач магниторазведки и гравиразведки. Это позволяет использовать богатый арсенал средств, накопленных в гравиметрии, для расчета и интерпретации магнитных аномалий.

В настоящей статье рассматриваются вопросы построения алгоритмов решения прямых задач гравиметрии и геодинамики. Под прямой задачей геодинамики здесь понимается задача расчета параметров напряженно-деформированного состояния среды, обусловленного неоднородностью ее плотностного строения.

В основу решения задач положены методы теории потенциала, что позволяет создавать эффективные вычислительные алгоритмы на базе типовой методики решения прямых задач гравиметрии, изложенной в работах [1–4].

Решение прямой задачи гравиметрии для трёхмерных блоково-градиентно-слоистых сред

Как отмечено в работах [4–7], при плотностном моделировании геологических структур в гравитационном поле их необходимо сводить к трехмерным моделям, а плотностную параметризацию осуществлять с учётом изменения плотности как в латеральном направлении, так и в направлении от кровли к подошве.

В качестве расчетного элемента в этом случае удобно использовать вертикальную треугольную призму (рис. 1), плотность которой записывается в виде линейной функции от глубины $\rho(\xi_3)=\rho_0+k\xi_3$. Здесь и далее, для сокращения объема записи, будем пользоваться взамен *буквенной* (используемой в работах [5–7]) *числовой* индексацией координат (используемой в работах [2, 3]), полагая $x=x_1, y=x_2, z=x_3$ – в обозначении координат точек расчета и $\xi=\xi_1, \eta=\xi_2, \zeta=\xi_3$ – в обозначении координат переменных интегрирования.

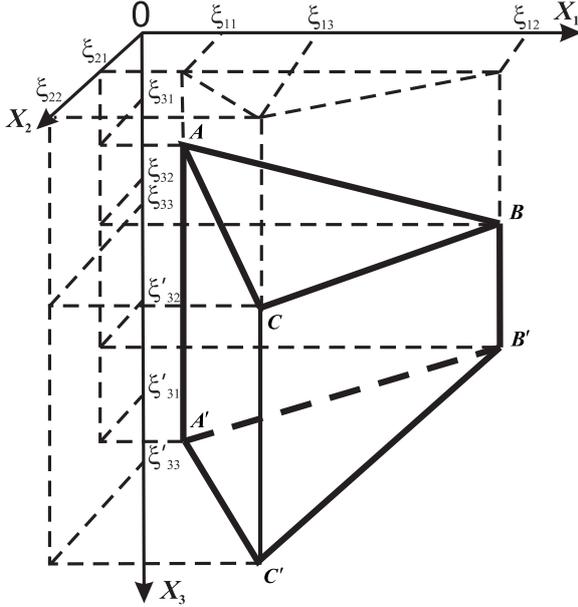


Рис. 1. К решению прямой задачи гравиметрии. Аппроксимирующая вертикальная треугольная призма. Условные обозначения и пояснения в тексте

В этом случае выражение для вертикальной составляющей гравитационного потенциала от призмы примет следующий вид:

$$V_{x_3}(\mathbf{x}) = f \iiint_D (\rho_0 + k\xi_3)(\xi_3 - x_3) P^{-3} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (1)$$

где D – вертикальная треугольная призма,

$$P = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2};$$

f – константа гравитации.

Об аналитических решениях прямой задачи гравиметрии для выделенного аппроксимирующего элемента сообщалось. В работах [7–10] приводятся принципиально идентичные, но отличающиеся по форме аналитические выражения для составляющих гравитационного потенциала от тел переменной плотности.

В.Н. Страховым в работе [2] был предложен новый подход к решению прямых задач гравиметрии для многогранных тел, который, как показали сопоставления, проведенные в работе [3] для тел с постоянной плотностью, позволяет получать вычислительные алгоритмы, превосходящие аналогичные решения по таким показателям, как точность, быстрдействие и устойчивость.

Приводим решение прямой задачи гравиметрии (1), выполненное в соответствии с методикой работ В.Н. Страхова [2, 3]. Особенность этого решения состоит в том, что оно, в отличие от [2, 3], дано для тел с линейным законом изменения плотности.

Введем следующие обозначения: пусть S_1 и S_2 – соответственно верхняя и нижняя грани призмы, а S_3, S_4 и S_5 – её боковые грани. Тогда аналитическое выражение для вертикальной составляющей гравитационного потенциала можно записать в виде:

$$V_{x_3}(\mathbf{x}) = -f \sum_{i=1}^2 [c_i v_i(\mathbf{x}) + k r_i(\mathbf{x})] \gamma_{3,3}^{(i)} + f k V(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Здесь $f k V(\mathbf{x})$ – гравитационный потенциал от призмы с постоянной плотностью k ; $V(\mathbf{x})$ определяется по формуле:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^5 d_i v_i(\mathbf{x}) / 2, \quad (3)$$

$$v_i(\mathbf{x}) = 2 \sum_{j=1}^{N_i} t_{i,j} \operatorname{arth} \Lambda_{i,j} + |d_i| \operatorname{atan} \frac{t_{i,j} (D_{i,j}^{(2)} - D_{i,j}^{(1)})}{D_{i,j}^{(2)} D_{i,j}^{(1)} + t_{i,j}^2}, \quad (4)$$

$$r_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \alpha_{i,j} \beta_{2,2}^{(i,j)} \gamma_{2,3}^{(i)} / 2, \quad i = 1, 2, \dots, 5; \quad (5)$$

где

$$c_i = \rho_0 + k x_3 + k d_i \gamma_{3,3}^{(i)}, \quad d_i = \sum_{k=1}^3 \gamma_{3,k}^{(i)} x_{k,j}^{(i)},$$

$$t_{i,j} = \beta_{2,1}^{(i,j)} \gamma_1^{(i,j)} + \beta_{2,2}^{(i,j)} \gamma_2^{(i,j)}, \quad \Lambda_{i,j} = |L_{i,j}| / (R_{i,j} + R_{i,j+1}),$$

$$D_{i,j}^{(k)} = R_j + l_{i,j}^{(k)} + |d_i|, \quad l_{i,j}^{(k)} = \beta_{1,1}^{(i,j)} \gamma_1^{(i,j+k-1)} + \beta_{1,2}^{(i,j)} \gamma_2^{(i,j+k-1)},$$

$$\beta_{1,k}^{(i,j)} = (\gamma_k^{(i,j+1)} - \gamma_k^{(i,j)}) / L_{i,j} \quad (k = 1, 2), \quad \beta_{2,1}^{(i,j)} = -\beta_{1,2}^{(i,j)},$$

$$\beta_{2,2}^{(i,j)} = \beta_{1,1}^{(i,j)}, \quad \gamma_1^{(i,j)} = \sum_{k=1}^3 \gamma_{1,k}^{(i)} x_{k,j}^{(i)}, \quad \gamma_2^{(i,j)} = \sum_{k=1}^3 \gamma_{2,k}^{(i)} x_{k,j}^{(i)},$$

$$\alpha_{i,j} = (R_{i,j}^2 - d_i^2) \operatorname{arth} \Lambda_{i,j} + R_{i,j+1} l_{i,j}^{(2)} - R_{i,j} l_{i,j}^{(1)},$$

$$\gamma_{1,1}^{(i)} = -B_i D_i / (q_i |D_i|), \quad \gamma_{1,2}^{(i)} = A_i D_i / (q_i |D_i|),$$

$$\gamma_{1,3}^{(i)} = 0, \quad \gamma_{2,1}^{(i)} = -A_i D_i |C_i| / (q_i K_i |D_i|),$$

$$\gamma_{2,2}^{(i)} = -B_i D_i |C_i| / (q_i K_i |D_i|), \quad \gamma_{2,3}^{(i)} = -B_i D_i |C_i| / (q_i K_i |D_i|),$$

$$\gamma_{3,1}^{(i)} = A_i C_i / (K_i |C_i|),$$

$$\gamma_{3,2}^{(i)} = B_i C_i / (K_i |C_i|), \quad \gamma_{3,3}^{(i)} = |C_i| / K_i,$$

$$q_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}, \quad K_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2},$$

A_i, B_i, C_i, D_i – коэффициенты уравнения i -й грани призмы $A_i x_1 + B_i x_2 + C_i x_3 + D_i = 0$, определяемые по значениям координат вершин грани; N_i – количество вершин i -й грани призмы; $|L_{i,j}|$ – длина j -й стороны грани S_i ($j=1, 2, \dots, N_i$); R_{ij} – расстояние от расчетной точки до j -й вершины грани S_i ($R_{i,N_i+1} = R_{i,1}$); $x_{ij}^{(0)}, x_{ij}^{(0)}$ – координаты j -й вершины грани S_i .

Отметим, что формулы (2)–(5), также как и соответствующие формулы в работах [2, 3], являются *едиными для расчета как внешнего* (по отношению к телу D), *так и внутреннего полей*. Это позволяет использовать полученные формулы для обработки данных как наземных, так и скважинных измерений.

Таблица 1. Результаты вычисления вертикальной составляющей гравитационного потенциала в точках профиля, проходящего по ребру (профиль I) и внутри (профиль II) тела

Профиль	Координаты точки расчета, км			Расчет по формулам (2)–(5), 10^{-5} м/с ²	Расчет методом численного интегрирования (в Mathcad), 10^{-5} м/с ²	Расчет из работы [7], 10^{-5} м/с ²	Номер точки
	X_1	X_2	X_3				
I	4	0	1	1,06048024·10 ²	–	1,06048024·10 ²	1
	8	0	2	6,78016491·10 ¹	–	6,78016500·10 ¹	2
	8,001	0	2,0025	6,77264793·10 ¹	–	6,77264793·10 ¹	3
	12	0	3	2,15708388·10 ¹	2,15708388·10 ¹	2,15708397·10 ¹	4
	16	0	4	8,92005655·10 ¹	8,92005655·10 ¹	8,92005712·10 ¹	5
Время расчета, с				3,9·10 ⁻⁵	1,8·10 ⁻¹	7,3	
II	-6	3	10	-1,35443390·10 ⁰	-1,35443390·10 ⁰	-1,35443390·10 ⁰	1
	1,999	3	10	5,77334110·10 ⁰	–	5,77334110·10 ⁰	2
	2	3	10	5,77954460·10 ⁰	–	5,77954460·10 ⁰	3
	2,001	3	10	5,78574882·10 ⁰	–	5,78574882·10 ⁰	4
	4	3	1	1,46939534·10 ¹	–	1,46939534·10 ¹	5
Время расчета, с				4,5·10 ⁻⁵	9,0·10 ⁻²	4,5	

Примечание. Здесь и в табл. 2 подчеркнуты расхождения с расчетом по аналитическим выражениям (2)–(5). Алгоритм Mathcad, реализующий решение прямой задачи численным методом в точках, лежащих на ребре призмы, в точке 3 продолжения ребра, во внутренних точках тела и в точке 2 профиля II, «не работает».

Тестирование алгоритма решения прямой задачи гравиметрии

Устойчивость, точность и быстродействие алгоритма решения прямой задачи гравиметрии демонстрируются расчетами на трех прямолинейных профилях, различно расположенных по отношению к телу. В качестве модельного примера используется пример из работы [7]. В этой работе тестовые расчеты аналитических решений проверялись в сопоставлении с расчетами по «прямому» численному алгоритму, реализующему метод Тальвани [11].

Координатное описание тела, представленного на рис. 1: $A(X_1=0, X_2=0, X_3=0)$; $B(8, 0, 2)$; $C(4, 6, 10)$; $A'(0, 0, 12)$; $B'(8, 0, 15)$; $C'(4, 6, 18)$. Плотность тела в вершине A равна 2 г/см^3 , в вершине C' – 3 г/см^3 . Координаты вершин призмы заданы в км.

Профиль I совпадает с ребром AB . При этом точка 1 расположена на середине ребра; точка 2 расположена в вершине B ; точка 3 – на продолжении ребра в 1 м от вершины B ; точки 4, 5 – на продолжении ребра, на удалении от тела.

Профиль II проходит через тело. При этом точки 1, 2 расположены вне тела; точка 3 – на грани $ACC'A'$; точки 4, 5 – внутри тела; точки 2 и 4 – в 1 м от грани $ACC'A'$ вне и внутри тела, соответственно.

Профиль III проходит над телом параллельно оси OX_1 ($X_2=0, X_3=0,3$; первая точка $X_1=4$, последняя – $X_1=2004$; L – расстояние до тела, D – диаметр тела).

В табл. 1, 2 приведены результаты расчетов, выполненных по аналитическим формулам (2)–(5) в сопоставлении с аналогичными расчетами, полученными методом численного интегрирования выражения (1) для V_x , а также расчетами, приведенными в работе [7]. Численное интегрирование осуществлялось методом Ромберга в системе Mathcad.

Результаты расчетов тестового примера показывает, что алгоритм, реализующий аналитическое решение задачи (1) устойчив во всех характерных областях: на ребре, в вершине, в плоскости грани, на продолжении ребер и граней, вблизи особых точек, внутри тела.

Время счета алгоритмом (2)–(5) одной точки для одного тела составляет величину порядка $8,7 \cdot 10^{-6}$ с. Расчеты методом численного интегрирования в Mathcad выполняются на 4 порядка медленнее, не дают результатов в особых точках и в точках, близким к особым. Расчеты по аналитическим формулам в работе [7] проводились на ЭВМ ЕС-1022.

Таблица 2. Результаты вычисления вертикальной составляющей гравитационного потенциала в точках профиля III, расположенных на разных расстояниях от тела

Расстояние от тела		Расчет по формулам (2)–(5), 10^{-5} м/с ²	Расчет методом численного интегрирования (в Mathcad), 10^{-5} м/с ²	Расчет из работы [7], 10^{-5} м/с ²
L , км	L/D			
0	0	5,98105801·10 ¹	5,98105801·10 ¹	5,98105801·10 ¹
4	0,5	4,10351050·10 ¹	4,10351050·10 ¹	4,10351050·10 ¹
10	1,25	1,48639100·10 ¹	1,48639100·10 ¹	1,48639100·10 ¹
20	2,5	3,69388528·10 ⁰	3,69388528·10 ⁰	3,69388528·10 ⁰
50	6,25	3,21000192·10 ⁻¹	3,21000192·10 ⁻¹	3,21000192·10 ⁻¹
100	12,5	4,21741987·10 ⁻²	4,21741987·10 ⁻²	4,21741987·10 ⁻²
200	25	5,33427875·10 ⁻³	5,33427875·10 ⁻³	5,33427875·10 ⁻³
1000	125	4,27944428·10 ⁻⁵	4,27944428·10 ⁻⁵	4,27945062·10 ⁻⁵
2000	250	5,34895851·10 ⁻⁶	5,34895847·10 ⁻⁶	5,34935387·10 ⁻⁶
Время расчета, с		8,2·10 ⁻⁵	8,0·10 ⁻¹	13,2

Постановка задачи динамики неоднородной сильно вязкой среды

Образование и развитие геологических структур во многом обязаны гравитационному тектогенезу, т. е. движениям, обусловленным аномальными плотностями этих структур на фоне механически равновесного распределения плотности. Плотностные неоднородности тектоносферы, наряду с другими тектоническими факторами, вносят свой вклад в напряженно-деформированное состояние среды.

Е.В. Артюшковым [12] на основе анализа послеледниковых изостатических поднятий в Фенноскандии и других геолого-геофизических материалов, было показано, что в условиях чрезвычайно медленно протекающих во времени геологических процессов ($t \sim 10^3 \dots 10^7$ лет) и больших размеров геологических тел ($L \sim 10^3 \dots 10^6$ м) тектоносферу Земли можно считать сильно вязкой несжимаемой средой с вязкостью $\eta \sim 10^{19} \dots 10^{24}$ Па·с. Учитывая это, движения среды в тектоносфере могут быть описаны уравнением Навье–Стокса в приближении малых чисел Рейнольдса и уравнением неразрывности, которые в этих условиях принимают следующий вид:

$$-\nabla p(\mathbf{x}) + \eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – вектор скорости смещения среды в точке \mathbf{x} ; $p(\mathbf{x})$ – давление в точке \mathbf{x} , $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}$; $\mathbf{g} = g \cdot \mathbf{i}_3$ – вектор силы тяжести; $g = |\mathbf{g}| = 9,8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$; \mathbf{i}_3 – орт оси OX_3 ; $\rho(\mathbf{x})$ и η – соответственно плотность и коэффициент динамической вязкости среды.

Исследования, проведенные В.Ю. Косыгиным [13], Л.А. Масловым и О.С. Комовой [14], показывают, что при моделировании глубинных геодинамических процессов необходимо учитывать неоднородность строения Земли как по плотностным, так и по реологическим параметрам.

Для того, чтобы учесть эти факторы, моделируемый объем $D \subset E_3$ будем полагать состоящим из N

подобластей (*вертикальных призм*) D_n ; $D = \bigcup_{n=1}^N D_n$,

имеющих общие поверхности контакта $S_{nk} = \partial D_n \cap \partial D_k$, $n \neq k$.

Пусть η_n – значения вязкости среды в каждой из подобластей D_n . Тогда, систему уравнений движения среды можно записать в виде:

$$-\nabla p(\mathbf{x}) + \eta_n \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D_n, \quad (6)$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \rho_n \cdot \mathbf{g}$, $\mathbf{x} \in D_n$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – значение вектора скорости среды; $p(\mathbf{x})$ и ρ_n – соответственно давление и плотность среды, взятые относительно гидростатических значений.

Предполагается, что поверхность ∂D моделируемого объема D свободна от нагрузки, т. е.:

$$T_x(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial D. \quad (7)$$

Здесь символом $T_x(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}))$ обозначен вектор поверхностных сил (напряжений), действующий на бесконечно малый элемент dS поверхности ∂D в точке поверхности \mathbf{x} с нормалью $\mathbf{n}(\mathbf{x})$:

$$T_x(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})) = \left\| \tau_{ji}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) \right\|_{3 \times 3} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}),$$

$\left\| \tau_{ji}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) \right\|_{3 \times 3}$ – матрица, элементами которой являются компоненты напряжений, определяемые соотношениями:

$$\begin{aligned} \tau_{ji}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) &= \\ &= \eta (\partial u_i(\mathbf{x}) / \partial x_j + \partial u_j(\mathbf{x}) / \partial x_i) - \delta_{ij} p(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

На контактах смежных областей D_n и D_k заданы условия непрерывности значений компонент векторов скорости и напряжений:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} - 0) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + 0), \quad \mathbf{x} \in S_{nk}, \quad S_{nk} = \partial D_n \cap \partial D_k, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} T_x(\eta_k, \mathbf{u}(\mathbf{x} - 0), p(\mathbf{x} - 0), \mathbf{n}(\mathbf{x})) &= \\ &= T_x(\eta_k, \mathbf{u}(\mathbf{x} + 0), p(\mathbf{x} + 0), \mathbf{n}(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (9)$$

Необходимо найти распределение скорости смещения среды $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и давления $p(\mathbf{x})$, удовлетворяющие системе уравнений (6) при заданных граничных (7) и контактных (8), (9) условиях.

Решение задачи геодинамики

Используя методы теории потенциала [15, 16], решение системы (6)–(9) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= U_1(\mathbf{x}) + U_2(\mathbf{x}) + U_3(\mathbf{x}), \\ p(\mathbf{x}) &= P_1(\mathbf{x}) + P_2(\mathbf{x}) + P_3(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (10)$$

где $U_1(\mathbf{x})$ и $P_1(\mathbf{x})$ – объёмные потенциалы вида:

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{x}) &= \eta^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{n=1}^N \int_{D_n} \mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\xi) d\xi V, \\ P_1(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^N \int_{D_n} \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\xi) d\xi V. \end{aligned} \quad (11)$$

$U_2(\mathbf{x})$ и $P_2(\mathbf{x})$ – потенциалы простого слоя вида:

$$\begin{aligned} U_2(\mathbf{x}) &= 2\eta^{-1}(\mathbf{x}) \int_{\partial D} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \xi) \cdot \varphi_0(\xi) d\xi S, \\ P_2(\mathbf{x}) &= 2 \int_{\partial D} \mathbf{P}(\mathbf{x}, \xi) \cdot \varphi_0(\xi) d\xi S. \end{aligned} \quad (12)$$

$U_3(\mathbf{x})$ и $P_3(\mathbf{x})$ – потенциалы двойного слоя вида:

$$\begin{aligned} U_3(\mathbf{x}) &= - \sum_{n=1, k=n+1}^N (\eta_n - \eta_k) \eta^{-1}(\mathbf{x}) \times \\ &\times \int_{S_{nk}} T_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}_n(\xi)) \cdot \varphi(\xi) d\xi S \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} P_3(\mathbf{x}) &= - \sum_{n=1, k=n+1}^N 2(\eta_n - \eta_k) \times \\ &\times \int_{S_{nk}} \text{grad}_x(\mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\xi)) \cdot \varphi(\xi) d\xi S, \end{aligned} \quad (14)$$

$\eta(\mathbf{x}) = \eta_n$, $\mathbf{x} \in D_n$, $\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x})$ – матрица, элементами которой являются величины

$$\begin{aligned} g_j^i(\xi, \mathbf{x}) &= \\ &= -(\delta_{ij})^{-1} \partial^2 R(\xi, \mathbf{x}) / \partial \xi_j \partial \xi_i + \delta_{ji} (4\pi)^{-1} R^{-1}(\xi, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (15)$$

$P(\xi, x) = (p^1(\xi, x), p^2(\xi, x), p^3(\xi, x))$ – вектор, компоненты которого имеют вид:

$$p^i(\xi, x) = -(4\pi)^{-1} \partial R^{-1}(\xi, x) / \partial \xi_i, \quad (16)$$

Значения функций $\varphi_0(\xi)$, $\xi \in \partial D$ и $\varphi(\xi)$, $\xi \in S_{\text{конт}}$ определяются из решения системы интегральных уравнений Рисса–Шаудера:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) + 2 \int_{\partial D} T_x(G(x, \xi), P(x, \xi), n(\xi)) \cdot \varphi_0(\xi) d_\xi S = \\ = f_0(x), \quad x \in \partial V, \\ \varphi(x) + 2 \sum_{n=1, k=n+1}^N (\eta_n - \eta_k)(\eta_m + \eta_p)^{-1} \times \\ \times \int_{S_{nk}} T_\xi(G(\xi, x), P(\xi, x), n_n(\xi)) \varphi(\xi) d_\xi S = f_1(x), \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} f_0(x) &= -T_x(U_1(x), P_1(x), n(x)) - \\ & - T_x(U_2(x), P_2(x), n(x)), \\ & \quad x \in S_{mp} \subseteq S_{\text{конт}}; \\ f_1(x) &= 2 \int_{\partial D} G(x, \xi) \cdot \varphi_0(\xi) d_\xi S - \\ & - 2(\eta_m + \eta_p) \sum_{n=1}^N \int_{D_n} G(\xi, x) \cdot H(\xi) d_\xi V, \\ & \quad S_{\text{конт}} = \bigcup_{n=1}^N \partial D_n \setminus \partial D. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (6)–(9) в виде функционально-аналитических соотношений (10)–(14) получено Ю.В. Пятаковым [17].

Реализация решения связана с необходимостью вычисления интегралов в правых частях (11)–(14). Структура этих интегральных операторов во многом аналогична структуре интегральных операторов, рассматриваемых в задачах гравитационного потенциала. Поэтому для вычисления правых частей в соотношениях (11)–(14) целесообразно использовать технику решения прямых задач гравиметрии, рассмотренную в первой части статьи. Покажем это на примере вычисления составляющих решения $U_i(x)$, $P_i(x)$, определенных соотношениями (11).

Пусть D_n – вертикальная треугольная призма (рис. 2), имеющая избыточную плотность $\rho = \rho_n$. Тогда вектор скорости

$$u(x) = \eta^{-1} \int_{D_n} G(\xi, x) \cdot H(\xi) d_\xi V \quad (18)$$

и функция давления

$$p(x) = \int_{D_n} P(\xi, x) \cdot H(\xi) d_\xi V \quad (19)$$

будут представлять собой решение системы уравнений

$$-\nabla p(x) + \eta \nabla^2 u(x) + H(x) = 0, \quad (20)$$

$$\nabla u(x) = 0, \quad (21)$$

описывающей движение однородной вязкой среды $\eta = \text{const}$, обусловленное влиянием тела D_n с избыточной плотностью ρ_n . В соотношениях (18)–(20)

$$H(x) = \begin{cases} \rho_n \cdot g, & x \in D_n, \\ 0, & x \notin D_n. \end{cases} \quad (22)$$

Подставляя в соотношения (18), (19) выражения (15), (16), (22) для элементов $G(\xi, x)$, $P(\xi, x)$ и $H(x)$, получим аналитические выражения для компонент вектора скорости смещения среды $u(x)$ и функции давления $p(x)$:

$$u_m(x) = -\rho_n g (8\pi\eta)^{-1} \sum_{i=1}^2 [d_i \gamma_{3,m}^{(i)} v_i(x) + e_i(x)] \gamma_{3,3}^{(i)}, \quad m = 1, 2; \quad (23)$$

$$u_3(x) =$$

$$= -\rho_n g (8\pi\eta)^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^2 [d_i \gamma_{3,3}^{(i)} v_i(x) + r_i(x)] \gamma_{3,3}^{(i)} + \right. \\ \left. + 2V(x) \right\}; \quad (24)$$

$$p(x) = -\rho_n g (4\pi)^{-1} \sum_{i=1}^2 \gamma_{3,3}^{(i)} v_i(x), \quad (25)$$

где

$$e_i(x) = \sum_{j=1}^3 \alpha_{i,j} \left[\beta_{2,1}^{(i,j)} (\gamma_{1,1}^{(i)} + \gamma_{1,2}^{(i)}) + \right. \\ \left. + \beta_{2,2}^{(i,j)} (\gamma_{2,1}^{(i)} + \gamma_{2,2}^{(i)}) \right] \gamma_{2,3}^{(i)} / 2,$$

$V(x)$, $v_i(x)$, $r_i(x)$, α_{ij} , d_i , $\gamma_{k,m}^{(i)}$, $\beta_{2,2}^{(i,j)}$ – те же, что и в выражениях (2)–(5) для расчета составляющей $V_{x_3}(x)$ гравитационного потенциала.

Из соотношений (23)–(25) видно, что все составляющие аналитических выражений для компонент геодинамического поля $u(x)$ и $p(x)$ полностью определены соответствующими аналитическими составляющими решения прямой задачи гравиметрии.

Тестирование алгоритма решения прямой задачи геодинамики

В качестве тестового примера рассматривается аномальное тело (рис. 2, а) – горизонтальная призма, моделирующая линзу разуплотненной астеносферы в акватории Охотской глубоководной котловины [18]. Вязкость η вмещающей среды (астеносферы) и самого тела постоянна и равна 10^{19} Па·с, аномальная плотность тела $\rho = -0,02$ г/см³. Горизонтальное (верхнее) основание призмы расположено на глубине 100 км перпендикулярно направлению вектора ускорения силы тяжести g . Размеры призмы по оси OX_1 составляют 500 км, по оси OX_3 – 250 км, а по оси OX_2 – 1000 км. Исходное тело разбивается системой типовых аппроксимирующих тел (рис. 1) – вертикальных призм так, как это показано на рис. 2, б.

Проверим, удовлетворяет ли алгоритм, реализующий решение (23)–(25), системе уравнений (20)–(22)?

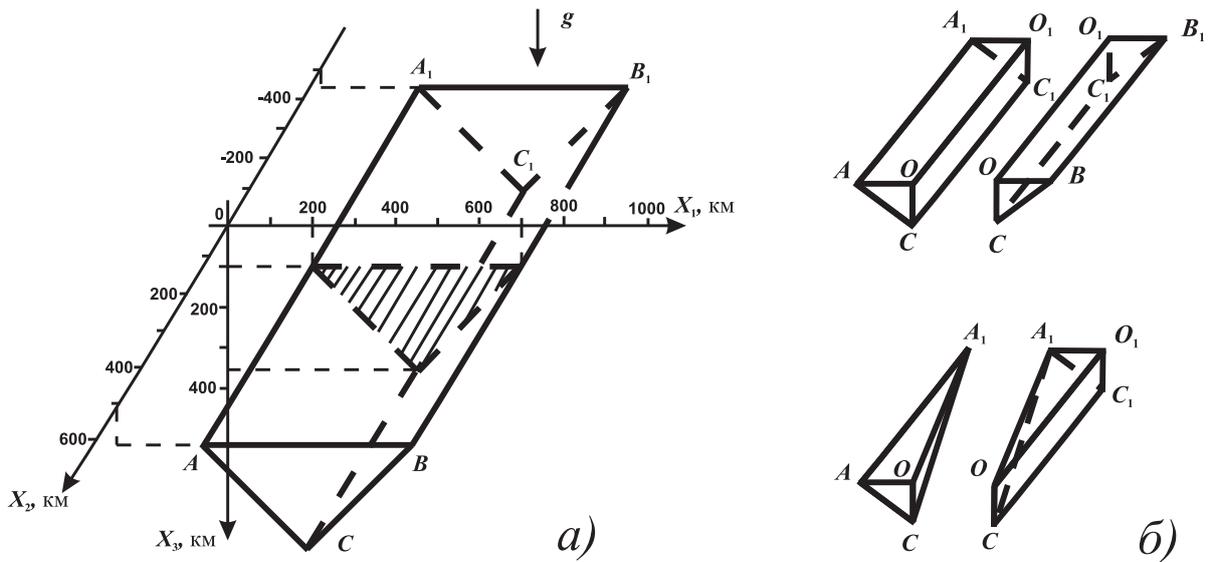


Рис. 2. К решению прямой задачи геодинамики: а) расположение тела аномальной плотности; б) аппроксимация тела системой вертикальных призм

Для этого рассмотрим дифференциальный оператор $A(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$:

$$A(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) = -\nabla p(\mathbf{x}) + \eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Построим аппроксимацию $A(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$ разностным оператором $\bar{A}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \Delta)$, компоненты которого имеют вид:

$$A_k = -\Delta^{-1} [p(\mathbf{x} + \Delta / 2 \cdot \mathbf{i}_k) - p(\mathbf{x} - \Delta / 2 \cdot \mathbf{i}_k)] + \eta \Delta^{-2} [\sum_{j=1}^3 u_k(\mathbf{x} + \Delta / 2 \cdot \mathbf{i}_j) + u_k(\mathbf{x} - \Delta / 2 \cdot \mathbf{i}_j) - 6u_k(\mathbf{x})],$$

где \mathbf{i}_k – k -й орт системы координат ($k=1,2,3$); u_k и p – компоненты вектора скорости и давления, вычисленные по формулам (23)–(25); Δ – приращение аргумента.

Тогда, вследствие непрерывности $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x})$, представленных соотношениями (23)–(25), при $\Delta \rightarrow 0$ должно выполняться предельное соотношение вида: $\bar{A}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \Delta) \rightarrow A(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$. В этом случае из уравнения (20) следует, что при $\Delta \rightarrow 0$ должно выполняться предельное соотношение вида:

$$\bar{A}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \Delta) + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \rightarrow 0. \quad (26)$$

Проверку соотношения (26) выполним расчетом в точках, расположенных вне и внутри тела (рис. 2, а). Результаты представлены в табл. 3.

Аналогично, заменим оператор $\nabla u(\mathbf{x})$ в (21) его конечно-разностной аппроксимацией:

$$\bar{d}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \Delta) = \Delta^{-1} \sum_{k=1}^3 (u_k(\mathbf{x} + \Delta / 2 \cdot \mathbf{i}_k) - u_k(\mathbf{x} - \Delta / 2 \cdot \mathbf{i}_k)).$$

Тогда при $\Delta \rightarrow 0$ в соответствии с уравнением (21) должно выполняться предельное соотношение

$$\bar{d}(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \Delta) \rightarrow 0. \quad (27)$$

Таблица 3. Результаты расчета $\bar{A}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \Delta) + \mathbf{H}(\mathbf{x})$ в точках, расположенных вне и внутри тела

Расчетные точки	Координаты расчетной точки, км			Компоненты $\bar{A}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \Delta) + \mathbf{H}(\mathbf{x})$	Численные значения компонент $\bar{A}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \Delta) + \mathbf{H}(\mathbf{x})$, при разных величинах приращения Δ		
	x_1	x_2	x_3		$\Delta=100$ км	$\Delta=1$ км	$\Delta=0,01$ км
	Вне тела	0	0		100	A_1	$-1,0 \cdot 10^0$
A_3				$1,0 \cdot 10^0$		$1,9 \cdot 10^{-7}$	$-3,2 \cdot 10^{-11}$
100		0	500	A_1	$4,6 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-11}$
				A_3	$-6,4 \cdot 10^{-4}$	$-5,7 \cdot 10^{-8}$	$-5,8 \cdot 10^{-11}$
450		0	50	A_1	0,0	0,0	0,0
				A_3	$-8,5 \cdot 10^{-1}$	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-10}$
Внутри тела	300	0	250	A_1	$9,9 \cdot 10^{-2}$	$9,3 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-10}$
				A_3	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-7}$	0,0
	450	0	325	A_1	0,0	0,0	0,0
				A_3	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	0,0
	450	0	350	A_1	0,0	0,0	0,0
				A_3	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	0,0

Как следует из результатов, приведенных в табл. 3 и 4, решение, представленное соотношениями (23)–(25), с высокой точностью удовлетворяют исходной системе уравнений (20)–(22).

Тестирование решения, результаты которого приведены в табл. 3 и 4, позволяет выявить возможные ошибки (неточности) в определении подинтегральных функций, включающих разностные соотношения, в которых фигурируют операции вычисления близких по значению величин.

В качестве **дополнительного тестового примера** приводим результаты расчетов (табл. 5) компонент вектора $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и функции $p(\mathbf{x})$ по формулам (23)–(25) и методом численного интегрирования выражений (18,19), выполненных в точке, внешней по отношению к телу (рис. 2, а). Координаты расчетной точки (в км): $x_1=50, x_2=50, x_3=50$.

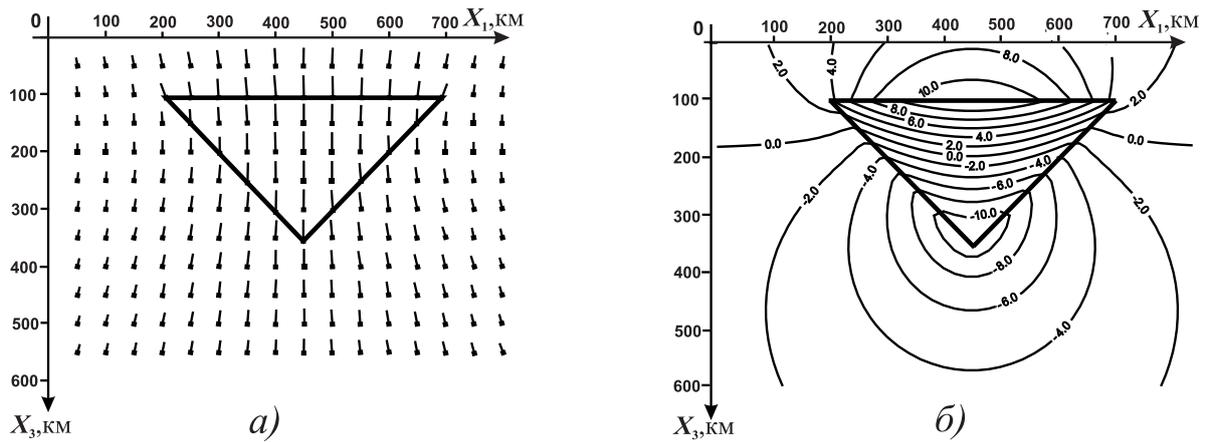


Рис. 3. К расчету геодинамического поля тектоносферы Охотоморской глубоководной котловины: а) распределение векторов мгновенной скорости смещения $u(x)$ среды, ($|u_{max}|=8,7$ м/год); б) распределение избыточного давления $p(x)$ в МПа. Пояснения в тексте

Таблица 4. Результаты расчета $\bar{d}(u(x), \Delta) \times \eta$

Расчетные точки	Координаты расчетной точки, км			Численные значения, $\bar{d}(u(x), \Delta) \times \eta$, при разных значениях приращения Δ			
	x_1	x_2	x_3	$\Delta=100$ км	$\Delta=1$ км	$\Delta=0,01$ км	$\Delta=0,0001$ км
Вне тела	0	0	100	$-5,0 \cdot 10^1$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-9}$	$4,9 \cdot 10^{-11}$
	100	0	500	$2,3 \cdot 10^1$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-9}$	$3,0 \cdot 10^{-11}$
	450	0	50	$3,5 \cdot 10^1$	$-1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-9}$	$-1,1 \cdot 10^{-12}$
Внутри тела	300	0	250	$-2,3 \cdot 10^0$	$-1,1 \cdot 10^{-4}$	$-1,1 \cdot 10^{-8}$	$-2,8 \cdot 10^{-11}$
	450	0	325	$1,2 \cdot 10^0$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-12}$
	450	0	350	$1,8 \cdot 10^0$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$5,1 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-11}$

Таблица 5. Результаты тестового расчета геодинамических параметров тектоносферы – компонент вектора скорости смещения $u(x)$ и давления $p(x)$. Точка расчета внешняя и удаленная по отношению к аномальному телу

Компоненты $u(x)$, $p(x)$	Расчет по аналитическим формулам (23)–(25)	Расчет методом численного интегрирования (в Mathcad)
u_1 , м/год	$-9,60420146 \cdot 10^{-1}$	$-9,60420146 \cdot 10^{-1}$
u_2 , м/год	$5,64268622 \cdot 10^{-2}$	$5,64268622 \cdot 10^{-2}$
u_3 , м/год	$-3,56608779 \cdot 10^0$	$-3,56608779 \cdot 10^0$
p , МПа	$1,73527102 \cdot 10^0$	$1,73527102 \cdot 10^0$
Время расчета, с	$9,1 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$

На рис. 3 представлены результаты расчетов поля мгновенных скоростей смещения среды $u(x)$ и давления $p(x)$, обусловленные влиянием аномального тела, взятого в качестве тестового примера (рис. 2, а). Расчеты проводились в плоскости симметрии аномального тела ($x_2=0$). Количество расчетных точек 176, время расчета $1,6 \cdot 10^{-2}$ с.

Полученного распределения скорости смещения среды не противоречит следствиям геодинамической концепции [12] в зоне субдукции. Ко-

нечно, полученные результаты не вполне корректны, т. к. для примера рассчитаны составляющие только объемных потенциалов (11). Кроме того, нужно учитывать, что над астеносферой расположен 100 км слой литосферы, вязкость которого $\approx 10^{21}$ Па·с. Этим слоем естественно и по определению (18) на два порядка «гасит» значения скорости.

Используя различные композиции из типовых аппроксимирующих тел можно со сколь угодно точностью строить модели различных участков тектоносферы Земли и рассчитывать их геодинамическое состояние.

Выводы

1. На основе типовой методики получено новое аналитическое решение прямой задачи гравиметрии для типового аппроксимирующего элемента – вертикальной треугольной призмы с линейным законом изменения плотности от глубины. На тестовых примерах показаны устойчивость, точность и быстродействие решения в точках, внешних и внутренних по отношению к среде.
2. Решение прямой задачи геодинамики представлено совокупностью потенциалов объемных, простого и двойного слоя. Численная реализация задачи выполнена с использованием типового решения прямых задач гравиметрии. На тестовых примерах продемонстрированы устойчивость, точность и быстродействие алгоритма решения прямой задачи геодинамики.
3. Полученные алгоритмы решения прямых задач могут быть использованы как универсальные для обработки данных наземной, шахтной и скважинной гравиразведки, а также для построения геодинамических моделей тектоносферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старостенко В.И. Гравитационное поле однородных n -угольных пластин и порождаемых ими призм: обзор // Физика Земли. – 1998. – № 3. – С. 37–53.
2. Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямая и обратная задачи гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников // Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. – Киев: Наукова думка, 1983. – С. 3–87.
3. Страхов В.Н., Лапина М.Н. Прямые задачи гравиметрии и магнитометрии для однородных многогранников // Геофизический журнал. – 1986. – Т. 8. – № 6. – С. 20–31.
4. Старостенко В.И., Легостаева О.В. Прямая задача гравиметрии для неоднородной произвольно усеченной вертикальной прямоугольной призмы // Физика Земли. – 1998. – № 12. – С. 31–44.
5. Исаев В.И., Гуленок Р.Ю., Лобова Г.А. Интерпретация данных высокоточной гравиразведки. Трёхмерность объектов // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 1. – С. 98–104.
6. Пятаков Ю.В., Исаев В.И. Методы решения прямых задач гравиметрии // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 1. – С. 105–110.
7. Исаев В.И., Пятаков Ю.В. Решение прямой задачи гравиметрии для трёхмерных блоково-градиентно-слоистых сред // Геофизический журнал. – 1990. – Т. 12. – № 3. – С. 72–79.
8. Голиздра Г.Я. Основные методы решения прямой задачи гравиразведки на ЭВМ // Региональная, разведочная и промышленная геофизика. – М.: ВИЭМС, 1977. – 98 с.
9. Кравцов Г.Г. Поле притяжения многогранников переменной плотности // Записки Ленинградского горного института. – 1978. – Вып. 66. – С. 8–17.
10. Балк П.И., Балк Т.В., Носырев В.И. Об аналитическом решении трёхмерной прямой задачи гравиразведки в случае переменной плотности возмущающих масс // Известия вузов. Сер. Геология и разведка. – 1976. – № 4. – С. 121–129.
11. Программы по математическому обеспечению обработки и интерпретации геолого-геофизических материалов на ЭВМ / под ред. В.Н. Яковлева. – Л.: Изд-во НПО «Рудгеофизика», 1982. – 354 с.
12. Артюшков Е.В. Геодинамика. – М.: Наука, 1979. – 328 с.
13. Косыгин В.Ю. Гравитационное поле и плотностные модели тектоносферы Северо-Запада Тихого океана. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. – 201 с.
14. Маслов Л.А., Комова О.С. Численное моделирование глубинных геодинамических процессов в активных окраинах // Физика Земли. – 1990. – № 3. – С. 53–60.
15. Михлин С.Г. Курс математической физики. – СПб.: Изд-во «Лань», 2002. – 576 с.
16. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / под ред. В.Д. Купрадзе. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
17. Пятаков Ю.В. Трёхмерная задача динамики сильно вязкой несжимаемой многокомпонентной гравитирующей среды. I. Постановка и алгоритм решения задачи // Геофизический журнал. – 2005. – Т. 27. – № 3. – С. 387–392.
18. Красный М.Л., Косыгин В.Ю., Исаев В.И. Оптимальная плотностная модель тектоносферы вдоль геотраверса о. Сахалин – о. Итуруп – Тихий океан // Тихоокеанская геология. – 1985. – Т. 4. – № 6. – С. 36–48.

Поступила 27.04.2012 г.