

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ РЕЗОНАТОРОВ В ВИДЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ В ПЛАНЕ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Мицкевич Светлана Александровна¹,
svetlana.mitskevich@gmail.com

Жигалов Максим Викторович¹,
zhigalovm@yandex.ru

Захарова Алена Александровна²,
zaa@tpu.ru

Крысько Вадим Анатольевич¹,
tak.@san.ru

¹ Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина,
Россия, 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77.

² Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

Актуальность. В связи с тем, что разведка полезных ископаемых – высоко технологичный процесс, актуальным является создание методов построения новых математических моделей, наиболее близко учитывающих истинную работу элементов микроэлектромеханических систем. Микроэлектромеханические системы – перспективные приборы современной микросистемной техники, интенсивно и динамично развивающегося научно-технического направления. Эти системы характеризуются уникально малыми массой и габаритами, низким потреблением электроэнергии, возможностью функционирования в жестких условиях эксплуатации и на несколько порядков меньшей стоимостью, чем их традиционные аналоги.

Цель работы: построение математической модели, наиболее полно отражающей реальную работу приборов микроэлектромеханических систем. Для этого следует учитывать большие перемещения, нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями, ударные нагрузки, температурные поля. Создание численных методов, которые позволят рассматривать распределенные механические структуры как системы с бесконечным числом степеней свободы. Анализ характера сложных нелинейных колебаний разработанных математических моделей. Выявление областей неустойчивого решения рассматриваемых элементов резонаторов микроэлектромеханических систем, связанных с хаотическими колебаниями.

Методы: вариационные методы, численные методы сведения уравнений в частных производных к задаче Коши – метод конечных разностей 2-го порядка точности; решение задачи Коши методами типа Рунге–Кутты; методы качественного исследования нелинейной динамики: Фурье, вейвлет анализа, сечение Пуанкаре, фазовый портрет.

Результаты исследования и выводы. Установлено, что переходные процессы зависят от геометрических и физических параметров оболочки, частоты вынуждающих колебаний и некоторых других параметров, т. е. единого сценария перехода колебаний из гармонических в хаотические нет. Характер колебаний существенно зависит от интенсивности деформаций. Выявлено, что наиболее часто встречающимся сценарием является сценарий Рюэля–Тakensа. Для некоторых значений кривизны получены модификации этого сценария.

Ключевые слова:

Нелинейная динамика, оболочки, геометрическая нелинейность, физическая нелинейность.

Введение

В настоящее время в геологоразведке происходит переход от простого вертикального бурения к управляемому горизонтально-вертикальному бурению. Создание таких установок невозможно без различных датчиков, которые необходимы для определения положения бура. При этом используемые сенсоры должны иметь возможность работы при сверхвысоких температурах и значительных уровнях вибрации.

Разведка и добыча полезных ископаемых, в частности газа и нефти, в последнее время становится все более высокотехнологичной отраслью. Это связано с целым рядом факторов. Во-первых, экологические нормы постоянно ужесточаются, а их нарушение жестко пресекается. Во-вторых, на-

более легкодоступные месторождения, залегающие неглубоко под поверхностью земли, встречаются все реже. В-третьих, организация геологоразведки и бурения глубоких шахт оказывается достаточно дорогостоящим мероприятием. В итоге поиск новых глубоко расположенных месторождений требует увеличения объемов бурения на фоне роста стоимости работ и при постоянном давлении со стороны экологов. Это привело к тому, что традиционное вертикальное бурение начинает уступать место высокотехнологичному и управляемому горизонтально-вертикальному бурению. Чтобы реализовать данную технологию добычи углеводородов, необходимо создать управляемый интеллектуальный бур, который содержит механическую часть, различные датчики, передатчик дан-

ных, систему управления. Создание такого устройства – это вызов не только для создателей фрез, но и для создателей электроники. Это связано с наличием сразу нескольких проблем, основными из которых являются высокие уровни вибрации и необходимость работы при повышенных температурах. Например, постоянная рабочая температура во время работы в скважине достигает 150 °С, при этом возможны скачки и до более высоких температур. Для позиционирования бура необходимо наличие различных датчиков: гироскопов, магнитометров и акселерометров. К сожалению, именно традиционные сенсоры микроэлектромеханических систем (МЭМС) достаточно чувствительны к температуре и вибрациям. Например, для акселерометров температура негативно влияет на точность измерений, а постоянные внешние вибрации приводят к деградации измерительных ячеек. В худшем случае может возникнуть резонанс, который приводит к ложным показаниям. Еще одним разрушительным фактором при бурении является наличие ударных нагрузок.

МЭМС содержит электронную схему, механические узлы и чувствительный элемент, выполненные в виде одного компонента с использованием технологических приемов, применяемых в производстве микросхем, т. е. МЭМС дополняет электронную схему датчиком и исполнительным механизмом – актюатором. Любая управляющая система осуществляет контроль над объектом с помощью управляющих сигналов, а ответное взаимодействие осуществляется с помощью сигналов обратной связи [1]. МЭМС имеют аналогичную структуру: сенсорная подсистема, актюаторная подсистема и подсистема анализа информации и принятия решений. Сенсорная подсистема служит для измерения состояния контролируемого объекта, которое осуществляется посредством передачи электрического сигнала в ответ на изменение какой-либо величины в системе. Актюаторная подсистема, наоборот, осуществляет воздействие на объект управления: при подводе к системе энергии реализует управляемое движение [2]. Относительное отставание в методах создания измерительной и исполнительной подсистем является препятствием на пути дальнейшего совершенствования МЭМС [3]. Таким образом, создание методики расчета и проектирования механических компонентов МЭМС является актуальной задачей. Проектируемые конструкции должны удовлетворять традиционным требованиям прочности, долговечности, надежности, а также специфическим требованиям быстродействия, обеспечения требуемых контактных усилий и отсутствия дребезга [4].

Актюаторы в виде тонких биметаллических элементов активно используются в современных технических устройствах. Наибольшее распространение получили биметаллические актюаторы в форме ламели, пластинки, и разного вида оболочек. Отметим, что теорией деформации элементов в форме осесимметричных пологих оболочек и пластин за-

нимались многие отечественные и зарубежные исследователи. Вопрос об устойчивости пологой биметаллической арки рассмотрен С.П. Тимошенко [5]. Влияние температуры на устойчивость чувствительного элемента термостата в форме пологого биметаллического сферического диска было исследовано в работе W.H. Wittricka [6]. Общая теория биметаллических упругих тонкостенных оболочек на основе гипотезы Кирхгофа–Лява для случая малых перемещений и деформаций изложена в работах Э.И. Григолюка [7–13]. Работы С.С. Гаврюшина и др. [14–19] посвящены расчету термобиметаллических чувствительных элементов. В них изложена методика анализа прохлопывающих под воздействием температурной и механической нагрузок тонкостенных осесимметричных оболочек на основе многопараметрического подхода, позволяющего рассматривать задачи о больших прогибах и исследовать закритическое поведение. Предложена новая конструкция термобиметаллического актюатора в виде осесимметричного пологого купола с язычком U-образной формы. Реализация движения является основным свойством актюаторов, поэтому на практике возникает необходимость учитывать большие прогибы, а также использовать материалы, упругие свойства которых не позволяют применять классический закон Гука. Все это приводит к рассмотрению нелинейных соотношений между деформациями и перемещениями (геометрическая нелинейность), а также между деформациями и усилиями (физическая нелинейность).

Особый раздел теории колебаний оболочек представляет исследование их нелинейных колебаний. При этом наибольший интерес при рассмотрении зависимости прогиба от нагрузки вызывает неустановившийся, переходный процесс движения оболочки от ее регулярных колебаний к полной потере устойчивости. Такой процесс обычно включает в себе скачкообразные переходы (бифуркации) от установившегося движения одного типа к некоторому другому движению, при достижении определенного критического значения нагрузки. Обзор результатов исследований свойств переходных процессов в колебаниях нелинейных систем опубликовал Т. Каританиак [20], где построены отображения Пуанкаре и типы фазовых траекторий с различными вариантами неустойчивости. P.J. Holmes [21] подробно исследовал хаотические движения слегка выпученного стержня, подвергающегося боковому синусоидальному возмущению. F.C. Moon [22] установил, что гармонически вынужденное движение выгнутого стержня отчетливо демонстрирует хаотический характер. Бифуркационные механизмы перехода к хаосу в сложных колебаниях балок под действием квазипериодического нагружения проанализированы в статье Yagasaki Takao [23]. N.S. Abhyankar и др. [24] предложили новый метод численного решения дифференциальных уравнений в частных производных, на основе которого провели компьютерные эксперименты для выявления закономерностей

стей перехода к хаосу в колебаниях балочных структур. Ü. Lerik [25] пытался выяснить возможность хаотических реакций в осесимметричных колебаниях упруго-пластических цилиндрических оболочек. В большинстве проведенных компьютерных экспериментов установившиеся колебания имели регулярный характер. Han Qiang и др. [26] провели анализ нелинейных колебаний упругой цилиндрической оболочки и нашли критические условия возникновения хаотического движения. Исследованию потери устойчивости цилиндрических панелей посвящена работа [27]. В работе [19] предложена методика расчета на устойчивость анизотропных оболочек вращения с произвольной формой меридиана при нелинейном докритическом состоянии. В работе [28] исследуется устойчивость сжатой в своей плоскости однородной пластины, лежащей на упругом основании.

Сравнению различных моделей, использующихся для определения собственных частот чувствительного элемента микромеханических гироскопов на этапе их проектирования, посвящена работа [29]. Монография [30] посвящена обобщению результатов по хаотической динамике нелинейных механических конструкций, находящихся под действием полей различной природы. В работах С.А. Мицкевич и др. [31, 32] были исследованы установившиеся колебания балочных МЭМС-резонаторов в вязкой среде и рассмотрена динамика гибких балок при действии ударных нагрузок с учетом белого шума. Нелинейная динамика вибрационных микромеханических гироскопов (ММГ) исследована в работе [33] на примере расчета балочного резонатора с начальной непрямолинейностью с учетом геометрической нелинейности. Построению математической модели и исследованию нелинейных колебаний вращающегося микромеханического гироскопового элемента в виде ортотропной круглой пластины, зажатой в ее центре, посвящена работа [34]. Исследованию хаотической динамики осесимметричных оболочек и контактного взаимодействия механических структур, связанных через краевые условия, посвящены статьи [35–38].

На основании обзора публикаций, посвященных условиям возникновения хаотических движений для элементов оболочечных и балочных структур, можно сделать вывод, что математические модели нелинейных колебаний элементов МЭМС в виде прямоугольных в плане геометрически и физически нелинейных пологих оболочек не рассматривались. Изучению таких явлений посвящена настоящая статья.

Основные допущения и гипотезы

Рассмотрим пологую прямоугольную в плане оболочку с размерами a , b , h вдоль осей x_1 , x_2 , x_3 соответственно. Для пологой сферической оболочки стрелу подъема, выраженную в её толщинах, легко определить, зная безразмерный параметр кривизны [39] k_1 или k_2 – $f=k_1/8$.

Начало координат расположено в левом верхнем углу оболочки в ее срединной поверхности, оси x_1 , x_2 параллельны сторонам оболочки, ось x_3 направлена внутрь кривизны (рис. 1). В указанной системе координат оболочка, как трехмерная область Ω , определяется как:

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3 / (x_1, x_2, x_3) \in [0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]\}.$$

Срединная поверхность обозначена как

$$\Gamma = \{x_1, x_2 / (x_1, x_2) \in [0, a] \times [0, b]\}.$$

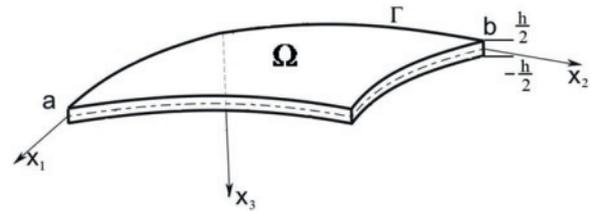


Рис. 1. Геометрические параметры оболочки

Fig. 1. Geometric parameters of the shell

Обозначим перемещения вдоль осей x_1 , x_2 , x_3 через u_1 , u_2 , u_3 соответственно, причем $u_3 = u_3(x_1, x_2)$. Все компоненты перемещения считаем значительно меньшими характерного размера оболочки в плане. Деформации срединной поверхности ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} предполагаем пренебрежимо малыми по сравнению с единицей, но это не означает, что связь между перемещениями и деформациями должна быть линейна.

Математическая модель оболочки строится на основе гипотез Кирхгофа–Лява, при этом геометрическая нелинейность учитывается по Карману.

Физические соотношения примем в виде [40]:

$$\sigma_{ij} = 3k\eta(e_0)e_0 + 2G\gamma(e_i)(e_{ij} - e_0), \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$e_0 = \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33}), \quad (1)$$

здесь k , G – модули объемного сжатия и сдвига; e_0 – средняя деформация; $\gamma(e_i)$ – функция сдвига; $\eta(e_0)$ – функция удлинения. Согласно данным [39], примем $\eta(e_0) = 1$.

Используя гипотезу плосконапряженного состояния и гипотезу Дюгамеля–Неймана, связь между напряжениями и деформациями запишем в виде:

$$\sigma_{11} = \frac{E\gamma(e_i)}{(1+\nu)(1-\mu)} [e_{11} + \mu e_{22} - (1+\mu)\alpha_T\theta], \quad (1, 2)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E\gamma(e_i)}{2(1+\nu)} e_{12}, \quad (2)$$

где e_i – интенсивность деформаций; E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; θ – приращение температуры; α_T – коэффициент линейного температурного расширения; $\mu = \frac{3-2g\gamma(e_i)}{2(3+g\gamma(e_i))}$, $g = \frac{G}{K}$; T_0 – начальная температура.

Предположим, что $\left| \frac{\theta}{T_0} \right| \ll 1$, то есть приращение температуры θ столь мало, что все термоупругие константы материала в формулах (1) и (2) можно считать постоянными и независимыми от температуры.

Сведение трехмерной задачи термоупругости к двумерной

Введем интегральные характеристики напряжений:

$$T_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3, \\ (i, j = 1, 2, i \neq j) \lim_{x \rightarrow \infty}, \quad (3)$$

Подставляя (1) в (3), интегрируя последние соотношения по x_3 от $-h/2$ до $h/2$ и проводя ряд преобразований получим:

$$T_{ij} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{ij} + \nu \varepsilon_{ij}) + \Delta T_{ij} - N_T - \Delta_T T, \\ M_{ij} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\xi_{ij} + \nu \xi_{ij}) + \Delta M_{ij} - M_T - \Delta_T M, \\ (i, j = 1, 2, i \neq j), \quad (4)$$

$$T_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12} + \Delta T_{12}, \quad M_{12} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \xi_{12} + \Delta M_{12}, \\ N_T = \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} \theta dx_3, \quad M_T = \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \theta dx_3, \quad (5)$$

где

$$\Delta T_{ij} = \frac{Eh}{1+\nu} [\varepsilon_{ij} P_1^1 + \varepsilon_{ij} P_1^2 + h(\xi_{ij} P_2^1 + \xi_{ij} P_2^2)], \\ \Delta M_{ij} = \frac{Eh^2}{1+\nu} [\varepsilon_{ij} P_2^1 + \varepsilon_{ij} P_2^2 + h(\xi_{ij} P_3^1 + \xi_{ij} P_3^2)], \\ (i, j = 1, 2; i \neq j), \\ \Delta T_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} (\varepsilon_{12} P_1^3 + h \xi_{12} P_2^3), \\ \Delta M_{12} = \frac{Eh^2}{2(1+\nu)} (\varepsilon_{12} P_2^3 + h \xi_{12} P_3^3), \\ \Delta_T T = E\alpha_T W_1, \quad \Delta_T M = E\alpha_T W_2, \\ P_k^n = \frac{1}{h^k} \int_{-h/2}^{h/2} F_n x_3^{k-1} dx_3, \quad n, k = 1, 2, 3, \\ W_i = \int_{-h/2}^{h/2} F_4 \theta x_3^{i-1} dx_3, \quad i = 1, 2, 3, \\ F_1 = \frac{(1-\nu)\gamma(e_i) - (1-\mu)}{(1-\nu)(1-\mu)}, \\ F_2 = \frac{\mu(1-\nu)\gamma(e_i) - \nu(1-\mu)}{(1-\nu)(1-\mu)}, \\ F_3 = \gamma(e_i) - 1, \\ F_4 = \frac{(1-\mu)(1-\nu)\gamma(e_i) - \nu(1+\nu)(1-\mu)}{(1-\nu^2)(1-\mu)}.$$

Разрешая соотношения (4) и (5) относительно деформации срединной поверхности, получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{Eh} \left[\frac{T_{ij} - \nu T_{ii} - (\Delta T_{ij} - \nu \Delta T_{ij})}{+(1-\nu)(N_T + \Delta_T T)} \right], \\ \chi_{ij} = \frac{12}{Eh^3} \left[\frac{M_{ij} - \nu M_{ij} - (\Delta M_{ij} - \nu \Delta M_{ij})}{+(1-\nu)(M_T - \Delta M_T)} \right], \\ (i, j = 1, 2; i \neq j), \\ \varepsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} (T_{12} - \nu \Delta T_{12}), \\ \chi_{12} = \frac{2L(1+\nu)}{Eh^3} (M_{12} - \nu \Delta M_{12}).$$

Согласно теории малых упруго пластических деформаций, функция сдвига $\gamma = \gamma(e_i)$ определяется из соотношений $G\gamma(e_i) = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i(e_i)}{e_i}$, откуда получаем

$\gamma(e_i) = \frac{\sigma_i(e_i)}{3Ge_i}$. Здесь $\sigma_i(e_i)$ – зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций.

Вариационная формулировка задачи

Для получения исходных уравнений используем вариационный принцип Био [41]:

$$\delta V + \delta D - \delta K = \iint_A (\bar{F}_0 \delta \bar{u}_0 - \theta \bar{n} \delta \bar{S}) dA, \quad (6)$$

здесь δV , δD , δK – вариации обобщенной свободной энергии, диссипативной функции и кинетической энергии соответственно; \bar{F}_0 , \bar{u}_0 – поверхностная сила и перемещение; \bar{n} – внешняя нормаль; A – ограничивающая тело поверхность. Вектор смещения энтропии \bar{S} связан с приращением энтропии s , в единице объема, по закону [41]:

$$s = -\text{div} \bar{S} = -\sum_i \frac{\partial S_i}{\partial x_i}.$$

Для понижения кратности интегралов в (6) проинтегрируем неиспользованные члены по x_3 от $-h/2$ до $h/2$. Пренебрегая членами \dot{u}_1, \dot{u}_2 , учитывая (1) и (3) и то, что $\sigma_{33} = 0$, получим:

$$\delta K = -\rho h \iint \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \delta u_3 dx_1 dx_2, \quad (7)$$

$$\iint \sum \sigma_{ij} \delta_{ij} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \iint_A (T_{11} \delta \varepsilon_{11} + T_{22} \delta \varepsilon_{22} + T_{12} \delta \varepsilon_{12}) dx_1 dx_2 + \\ + \iint_A (M_{11} \delta \chi_{11} + M_{22} \delta \chi_{22} + M_{12} \delta \chi_{12}) dx_1 dx_2, \quad (8)$$

$$\iint_A \bar{F}_0 \delta \bar{u}_0 dA = \iint_A (q - \rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}) \delta w dx_1 dx_2 + \\ + \int_0^b T_{11}^0 \delta u_1 dx_2 + \int_0^a T_{22}^0 \delta u_2 dx_1 + \int_0^a T_{12}^0 \delta u_1 dx_1 + \int_0^b T_{12}^0 \delta u_2 dx_2, \quad (9)$$

здесь ε – коэффициент демпфирования среды; q – интенсивность поперечной нагрузки.

Преобразуем первый интеграл справа в (8):

$$\begin{aligned} & \iint_A (T_{11}\delta\varepsilon_{11} + T_{22}\delta\varepsilon_{22} + T_{12}\delta\varepsilon_{12}) dx_1 dx_2 = \\ & = \delta \iint_A (T_{11}\varepsilon_{11} + T_{22}\varepsilon_{22} + T_{12}\varepsilon_{12}) dx_1 dx_2 - \\ & - \iint_A (\varepsilon_{11}\delta T_{11} + \varepsilon_{22}\delta T_{22} + \varepsilon_{12}\delta T_{12}) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Из полученных соотношений можно вывести динамические уравнения связанной нелинейной задачи теории пологих оболочек. Уравнения могут быть получены в двух видах: в перемещениях и в смешанной форме. Для получения численных результатов используем второй вид динамических уравнений – уравнений в смешанной форме.

Дифференциальные уравнения теории гибких геометрически и физически нелинейных микрооболочек в смешанной форме

Для получения исходных дифференциальных уравнений в смешанной форме вводим функцию усилий F известным образом.

Проводя в преобразованном выражении (8) интегрирование по частям и варьирование, учитывая то, что контурные интегралы в (9) сократятся с контурными интегралами, полученными в ходе преобразования (10), и учитывая (7), мы от вариационного принципа (6) переходим к системе из трех дифференциальных уравнений: уравнения теплопроводности, уравнения движения микрооболочки и уравнения совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & D\nabla^4 u_3 - L(u_3, F) - \nabla_k^2 F + \nabla^2 (M_T + \Delta_T M) - \\ & - \frac{\partial^2 (\Delta M_{11})}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 (\Delta M_{22})}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 (\Delta M_{12})}{\partial x_1 \partial x_2} - \\ & - q + \rho h \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Eh} \nabla^4 F = -\nabla_k^2 u_3 - \frac{1}{2} L(u_3, u_3) + \\ & + \frac{1}{Eh} \left[\frac{\partial^2 (\Delta T_{11} - \nu \Delta T_{22})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 (\Delta T_{22} - \nu \Delta T_{11})}{\partial x_1^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 (\Delta T_{12})}{\partial x_1 \partial x_2} - \right. \\ & \left. - (1 - \nu) \nabla^2 (N_T + \Delta_T T) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $\alpha = \frac{k_T}{\rho}$ – коэффициент температуропроводности; $L(*, *)$ – известные нелинейные операторы. Подчеркнутые слагаемые являются членами, учи-

тывающими физическую нелинейность материала. При их отбрасывании система уравнений (11)–(13) описывает физически линейную связанную задачу термоупругости гибких пологих микрооболочек в смешанной форме в температурном поле. К полученной системе уравнений необходимо присоединить начальные и граничные условия.

Безразмерные дифференциальные уравнения теории гибких пологих микро оболочек с учетом связанности полей температуры и деформации

Искомую систему дифференциальных уравнений (11)–(13), используя теорию подобия и размерности, приводим к безразмерному виду с помощью:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{a}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{b}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{h}, \\ \bar{u}_3 &= \frac{u_3}{h}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{h^2}{\alpha}, \\ k_1 &= k_1 \frac{a^2}{h}, \quad \bar{k}_2 = k_2 \frac{b^2}{h}, \quad \bar{F} = \frac{F}{Eh^3}, \\ \bar{q} &= q \frac{a^2 b^2}{Eh^4}, \quad \bar{t} = t \frac{\alpha}{h^2}, \quad \chi = \frac{a^2 b^2 \rho \alpha^2}{Eh^6}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\bar{q}_T = q_T \frac{abh_T}{hk_T}, \quad \bar{\theta} = \theta \frac{\alpha_T ab}{h^2},$$

$$\Delta \bar{T}_{ij} = \Delta T_{ij} \frac{ab}{Eh^3}, \quad \Delta \bar{M}_{ij} = \Delta M_{ij} \frac{ab}{Eh^4}.$$

Система уравнений (16)–(18) при помощи преобразования (19) приводится к безразмерному виду (черточки над безразмерными переменными для сокращения записи опущены):

$$\frac{h^2}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12(1-\nu^2)} \times \\ & \times (\lambda^{-2} \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4}) - L(u_3, F) - \\ & - \nabla_k^2 F + \lambda^{-1} \frac{\partial^2 (M_T + \Delta_T M)}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 (M_T + \Delta_T M)}{\partial x_2^2} - \\ & - \lambda^{-1} \frac{\partial^2 (\Delta M_{11})}{\partial x_1^2} - \lambda \frac{\partial^2 (\Delta M_{22})}{\partial x_2^2} - \\ & - 2 \frac{\partial^2 (\Delta M_{12})}{\partial x_1 \partial x_2} - q + \chi \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \lambda^{-2} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} + \\ & + (1 - \nu) \left[\lambda^{-1} \frac{\partial^2 (N_T + \Delta_T T)}{\partial x_1^2} + \lambda \frac{\partial^2 (N_T + \Delta_T T)}{\partial x_2^2} \right] + \\ & + \nabla_k^2 u_3 + \frac{1}{2} L(u_3, u_3) - \lambda^{-1} \frac{\partial^2 (\Delta T_{22} - \nu \Delta T)}{\partial x_1^2} - \end{aligned}$$

$$-\lambda \frac{\partial^2 (\Delta T_{11} - \nu \Delta T_{22})}{\partial x_2^2} + 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 (\Delta T_{12})}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (17)$$

В качестве начальных условий примем нулевое распределение прогибов и скоростей прогиба оболочки, в начальный момент времени $t=0$:

$$u_3 \Big|_{t=0} = \frac{\partial u_3}{\partial t} \Big|_{t=0} = \theta \Big|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

Граничным условием для уравнения теплопроводности (15) является полная теплоизоляция оболочки:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0,5} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad (19)$$

где n – нормаль к границе области Ω .

В качестве граничных условий для (16), (17) используем условия шарнирного опирания на гибкие нерастяжимые (несжимаемые) в касательной плоскости ребра.

$$\begin{aligned} u_3 = 0, \quad M_{22} = 0, \quad \varepsilon_{11} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} = 0 \\ \text{при } x_2 = 0, x_2 = b, \\ u_3 = 0, \quad M_{11} = 0, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \text{при } x_1 = 0, x_1 = a. \end{aligned} \quad (20)$$

Метод решения задачи нелинейной динамики гибких физически нелинейных прямоугольных в плане пологих оболочек

Уравнения в частных производных (15)–(20) сводятся к задаче Коши и к системе алгебраических уравнений относительно F методом конечных разностей с аппроксимацией $O(h^2)$ по пространственным координатам.

При решении системы уравнений был использован следующий алгоритм. Используя найденные на предыдущем шаге по времени значения w_{ij} , ΔT_{11ij} , ΔT_{22ij} , ΔT_{12ij} , решалась система алгебраических уравнений относительно величин F_{ij} методом Гаусса. Полученные величины F_{ij} и найденные на предыдущем шаге по времени значения ΔM_{11ij} , ΔM_{22ij} , ΔM_{12ij} подставлялись в дифференциальные уравнения (16), (17), после чего производилось интегрирование этих уравнений по времени методом Рунге–Кутты 4-го порядка.

Далее в каждой точке тела вычисляется интенсивность деформаций

$$e_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{33} - e_{11})^2 + 3e_{12}^2},$$

и при помощи известной для данного материала зависимости $\sigma_i(e_i)$ определяется значение интенсивности напряжений σ_i . Функция сдвига

$$\gamma(e_i) = \frac{\sigma_i(e_i)}{3Ge_i}$$

используется для вычисления нелинейных членов, которые будут использованы для расчетов на следующем шаге по времени.

На первом шаге по времени, вследствие начальных условий, все нелинейные члены равны нулю.

Численные результаты

Исследуем нелинейные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек на прямоугольном плане при действии поперечной знакопеременной нагрузки. Рассмотрим колебания диссипативной системы ($\varepsilon=1$) в виде квадратной в плане ($\lambda=a/b=1$) сферической оболочки, совершающей колебания под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности $q=q_0 \sin \omega_p t$.

Оболочка изготовлена из сплава АМц и имеет следующие геометрические и физические параметры: $a=b=0,1$ м, $h=0,89 \cdot 10^{-3}$ м, $E=69$ ГПа, $\nu=0,3$, $\rho=2800$ кг/м³, $a/h=10$. Зависимость $\sigma_i(e_i)$ аппроксимирована билинейной диаграммой:

$$\sigma_i = Ee_i, \quad e_i \leq e_s, \quad e_s = 1,35 \cdot 10^{-3}; \quad E^* / E = 0,4478.$$

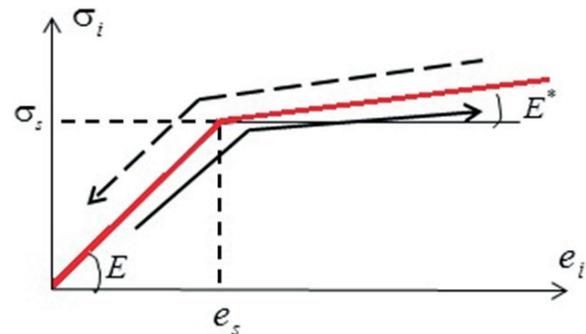


Рис. 2. Диаграмма $\sigma_i(e_i)$

Fig. 2. Diagram $\sigma_i(e_i)$

Возникновение остаточных деформаций не учитывается, т. е. рассматривается физическая нелинейность, при которой траектории нагрузки (сплошная линия со стрелкой) и разгрузки (пунктирная линия со стрелкой) совпадают (рис 2). До настоящего времени не исследован вопрос о связи динамического критерия потери устойчивости с характером колебаний и видом траектории нагрузка–разгрузка.

Для изучения характера колебаний была взята оболочка под действием знакопеременной нагрузки с частотой, совпадающей с собственной линейной частотой колебаний оболочки, и частотами, находящимися в окрестностях собственной линейной частоты. Определить аналитически частоту собственных колебаний в нелинейной задаче довольно затруднительно. Для получения частоты собственных линейных колебаний ω_0 применялся метод Фаэдо–Галеркина.

Исследования показали, что качественная картина процесса колебаний для всех точек оболочки практически одинакова, поэтому дальнейший анализ отнесен к ее центральной точке $u_3(0,5;0,5)$. Описывая переходные процессы в движениях оболочки, будем устанавливать вид ее колебаний с помощью анализа графиков зависимостей «нагруз-

ка-прогиб», «нагрузка – интенсивность деформаций», «нагрузка–усилие». Все зависимости строились в одни и те же моменты времени, соответствующие максимальным прогибам оболочки. Распределения интенсивности деформаций для различных колебательных режимов в моменты времени, соответствующие максимальным прогибам оболочки, приведены на рисунках. Так как распределения прогибов по поверхности оболочки в момент достижения своего максимального значения при регулярных колебательных режимах качественно похожи, то на рисунках они не приводятся.

Проводилось сравнение поверхности изгибания в различные моменты времени и интенсивности деформаций в эти же моменты времени на верхней поверхности оболочки $x_1=x_2=0,5$, $x_3=-0,5$. Остановимся на примере для оболочечной конструкции $k_1=k_2=24$ с граничными условиями (25). На рис. 3, 4 выделены небольшие интервалы времени в зависимости $w(t)$ и в указанных точках построены распределения прогибов w по плану оболочки и распределение интенсивности деформаций e_i . Легко заметить, что при действии нагрузок, когда колебания

еще сохраняют регулярную форму (рис. 3), распределения $w(x_1, x_2)$ и $e_i(x_1, x_2)$ остаются достаточно гладкими, хотя распределение e_i всегда, даже при минимальных нагрузках, остается более сложным, чем для w . Как только колебания переходят в хаотический режим, форма распределения w и e_i по плану резко усложняется (рис. 3), образуется большое количество зон местных экстремумов. Таким образом, совместный анализ показал, что основной вклад в соотношение для интенсивности деформации оказывает изменение функции прогиба и ее второй производной, т. е. изгибные деформации.

Рассмотрим оболочку с безразмерным параметром кривизны $k_1=k_2=18$ и частотой вынуждающих колебаний ω_p в пределах [16;21]. Собственная линейная частота колебаний $\omega_0 \approx 17,6$.

Зафиксировав частоту вынуждающих колебаний, будем изменять величину нагрузки до появления хаотических эффектов.

При небольших нагрузках колебания носят периодический характер. Начиная с $q_0=10$ происходит разрушение периодических колебаний. Амплитуда колебаний оболочки при этом резко возрастает (рис. 5, 4) (здесь и в дальнейшем на рисунках

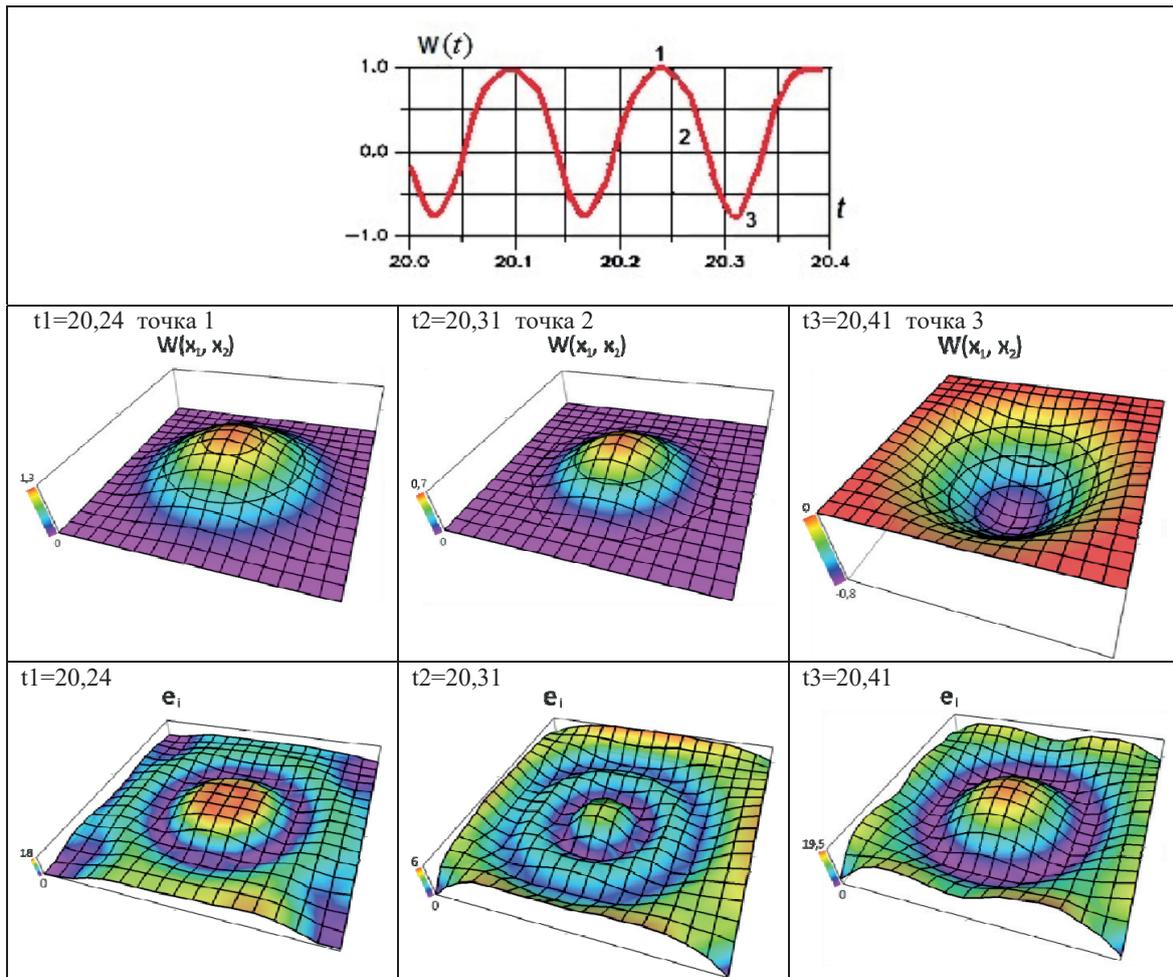


Рис. 3. Зависимость $w(t)$, распределения $w(x_1, x_2)$ и $e_i(x_1, x_2)$ для случая $k_1=k_2=24$; $\omega_p=14$, $q_0=65$

Fig. 3. Dependence $w(t)$, distributions $w(x_1, x_2)$ and $e_i(x_1, x_2)$ for the case $k_1=k_2=24$; $\omega_p=14$, $q_0=65$

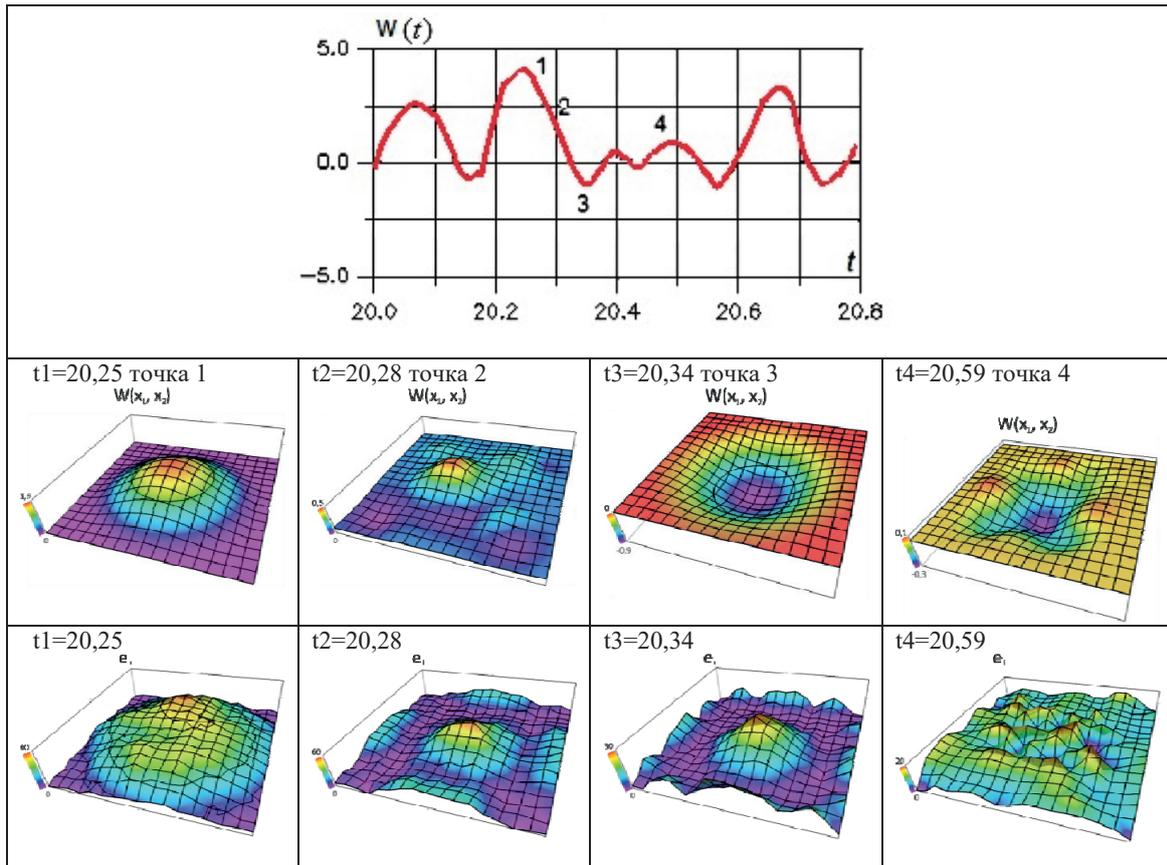


Рис. 4. Зависимость $w(t)$, распределения $w(x_1, x_2)$ и $e_i(x_1, x_2)$ для случая $k_1=k_2=24$; $\omega_p=14$, $q_0=200$

Fig. 4. Dependence $w(t)$, distributions $w(x_1, x_2)$ and $e_i(x_1, x_2)$ for the case $k_1=k_2=24$; $\omega_p=14$, $q_0=200$

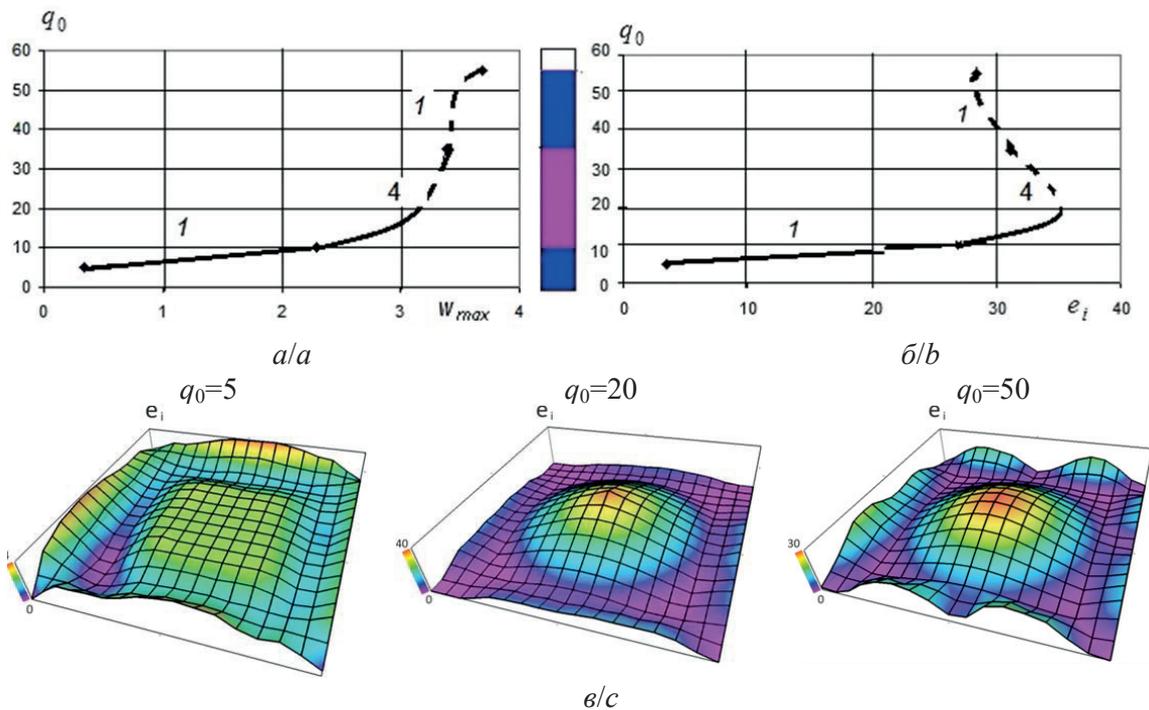


Рис. 5. Зависимость а) нагрузка – максимальный прогиб; б) нагрузка – интенсивность деформаций; в) распределение интенсивности деформаций по плану оболочки при частоте возбуждения $\omega_p=16$

Fig. 5. Dependence: a) load – maximum deflection; b) load – deformation intensity; c) distribution of deformation intensity within the shell, at excitation frequency $\omega_p=16$

будут использованы следующие обозначения: 1 – периодические колебания (■); 2 – периодические колебания в режиме бифуркации удвоения периода (■); 3 – периодические колебания в режиме бифуркации утроения периода (■); 4 – двухчастотные квазипериодические колебания (■); 5 – хаотические колебания (□). При $q_0=12$ происходит полная смена режима колебаний на квазипериодические. С увеличением амплитуды колебаний q_0 происходит обратная перестройка системы. Рост прогибов оболочки значительно замедляется, интенсивность деформаций при этом снижается (рис. 5). Начиная с квазипериодического режима зона наибольшей интенсивности деформаций концентрируется в центре плана оболочки. При $q_0=40$ система полностью возвращается в периодический режим. Система переходит в хаос при $q_0=57$. На рис. 5–7 пунктирные линии соответствуют режимам колебаний при разгрузке (рис. 2), а сплошные линии – процессу активного нагружения.

Рассмотрим оболочку с частотой вынуждающих колебаний, совпадающей с собственной частотой колебаний, $\omega_p = \omega_0 = 17,6$.

В данном случае периодический режим сохраняется до $q_0=70$. При $q_0=62$ происходит смена режима колебаний. Прогибы оболочки продолжают возрастать (рис. 6), а интенсивность деформаций начинает снижаться (рис. 6). При дальнейшем увеличении нагрузки происходит качественная перестройка режима колебаний. Наблюдается значительное возрастание амплитуды колебаний, но интенсивность деформаций при этом продолжает падать. При $q_0=95$ начинается разрушение квазипериодических колебаний, что приводит к наступле-

нию хаоса. Происходит перераспределение зон наибольшей интенсивности деформаций с центра плана оболочки на ее углы.

Увеличивая частоту до $\omega_p=19$, наблюдаем, что до величины нагрузки $q_0=80$ система находится в режиме периодических колебаний (1-го типа). Интенсивность деформаций и амплитуда колебаний оболочки плавно возрастают. Хотя прогибы оболочки продолжают возрастать, рост интенсивности деформаций прекращается.

При амплитуде $q_0=113$ происходит смена режима колебаний на квазипериодические. Об этом свидетельствуют все основные характеристики. При дальнейшем увеличении нагрузки происходит разрушение квазипериодического режима и наступает хаос. С наступлением квазипериодичности отмечается резкий рост прогибов и интенсивности деформаций (рис. 7). Зоны наименьшей интенсивности деформаций находятся на осях симметрии оболочки.

Заключение

Обобщая выше приведенные результаты, можно сделать следующие выводы:

1. Переходные процессы зависят от кривизны оболочки, частоты вынуждающих колебаний и некоторых других параметров, т. е. единого сценария перехода нет.
2. В случае шарнирного опирания при кривизнах $k_1=k_2=18$ в основе схемы перехода лежит сценарий типа Рюэля–Такенса, т. е. через разрушение квазипериодических колебаний. Но при некоторых вынуждающих частотах наблюдается включение в указанную схему элементов

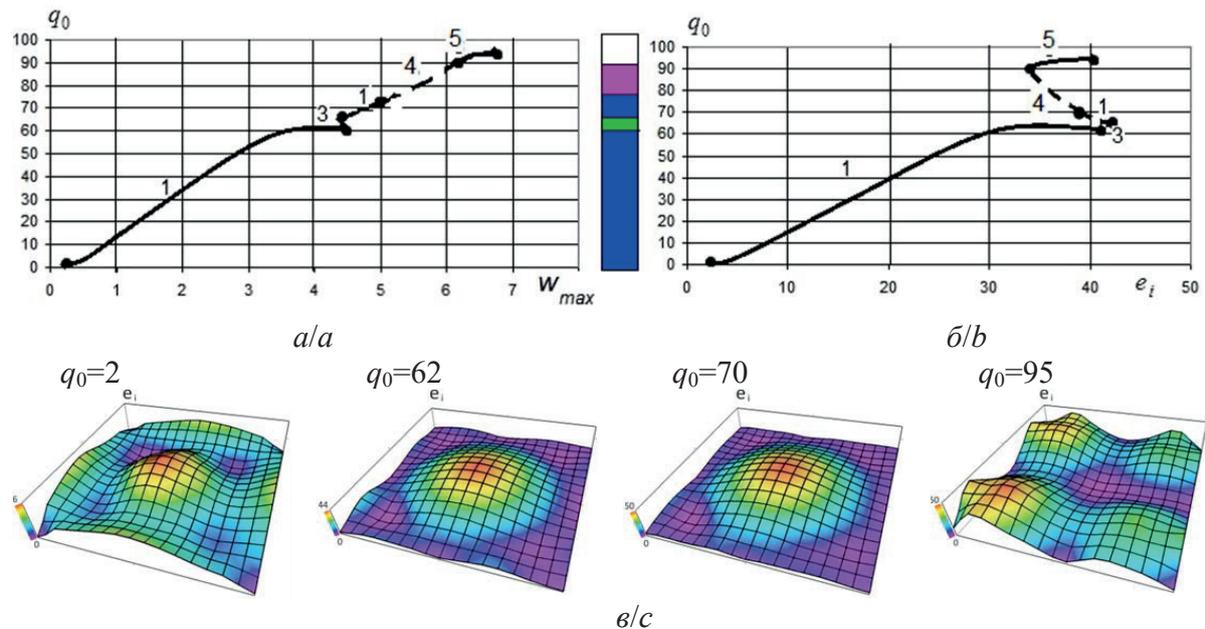


Рис. 6. Зависимости: а) нагрузка – максимальный прогиб; б) нагрузка – интенсивность деформаций; в) распределение интенсивности деформаций по плану оболочки, при частоте возбуждения $\omega_p=17,6$

Fig. 6. Dependences: а) load – maximum deflection; б) load – deformation intensity; в) distribution of deformation intensity within the shell, at excitation frequency $\omega_p=17,6$

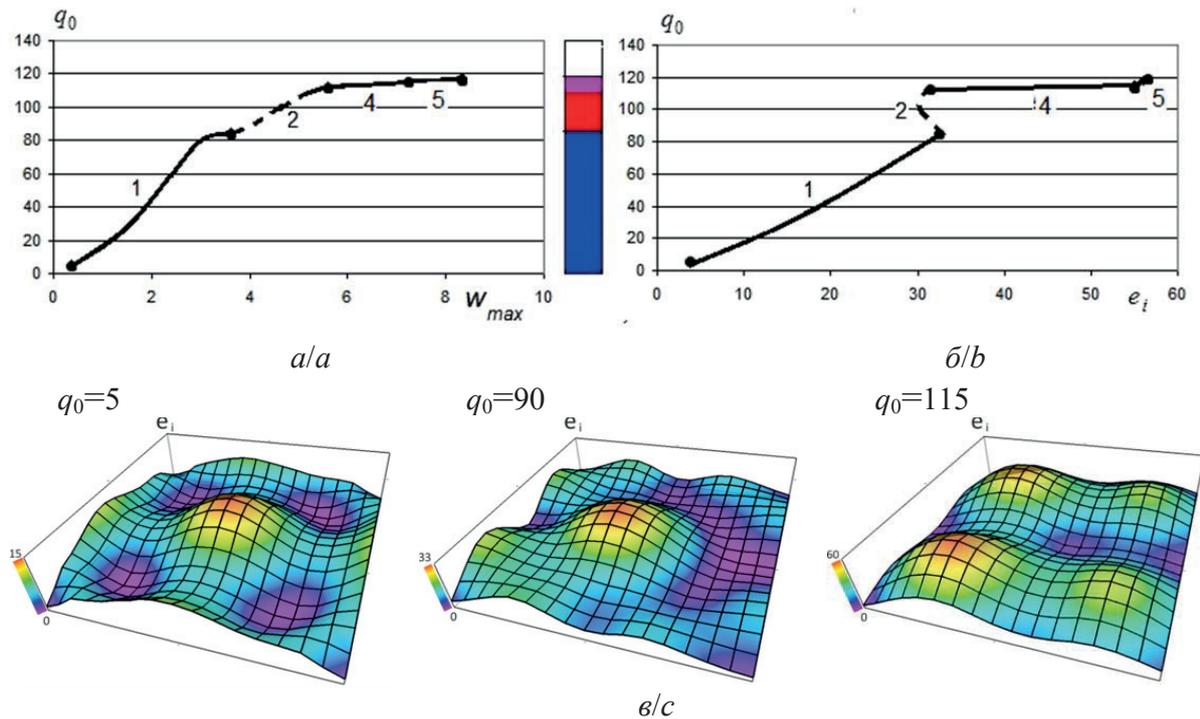


Рис. 7. Зависимости: а) нагрузка – максимальный прогиб; б) нагрузка – интенсивность деформаций; в) распределение интенсивности деформаций по плану оболочки, при частоте возбуждения $\omega_p=19$

Fig. 7. Dependences: a) load – maximum deflection; b) load – deformation intensity; c) distribution of deformation intensity within the shell, at excitation frequency $\omega_p=19$

других сценариев (например, явление перемежаемости и бифуркации периодических колебаний).

- Для шарнирно опертой оболочки с $k_1=k_2=24$ наряду со схемой Рюэля–Такенса (с небольшими отклонениями от нее) при некоторых значе-

ниях вынуждающей частоты переход к хаотическому движению происходит через серию бифуркаций периодических колебаний, но без удвоения периода.

Работа выполнена при поддержке гранта РФ № 16-19-10290.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Wiener N. Cybernetics: Control and Communication in the Animal and the Machine 2nd ed., 1961. – Cambridge, Mass.: the MIT Press. – 212 p.
- Christiansen D., Alexander C.K., Jurgen R.K. Standard book of electronic engineering. – New York: McGraw-Hill Professional, 2004. – 220 p.
- Нурилин Ю.Р., Пяташев Е.Н. Микротехнологии и микроэлектромеханические системы – перспективное научно-инновационное направление // Компетентность. – 2006. – № 5–6. – С. 3–9.
- Люминарский И.Е. Разработка научных методов расчета нестационарного взаимодействия тонкостенных элементов с жесткими односторонними связями и математических моделей волновых передач: дисс... д-ра наук. – М., 2009. – 365 с.
- Timoshenko S.P. Analysis of bimetal thermostat // Journal of the optical society of America and review of the Scientific Instruments. – 1925. – V. 11. – № 3. – P. 233–255.
- Wittrick W.H., Myers D.M., Blumden W.H. Stability of bimetallic disk // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 1953. – V. 6. – № 1. – С. 15–31.
- Григолюк Э.И. О перемещениях пологих термобиметаллических полос // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. – 1950. – Вып. 11. – № 1. – С. 40–45.
- Григолюк Э.И. О равновесии и устойчивости биметаллических полос // Инженерный сборник АН СССР. – 1950. – Т. 7. – С. 89–97.
- Григолюк Э.И. Температурные напряжения в круглой сплошной биметаллической пластинке // Труды каф. Сопромат МВТУ. – 1947. – Т. 3. – С. 55–69.
- Григолюк Э.И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины // Инженерный сборник. – 1953. – Т. XVII. – С. 69–120.
- Григолюк Э.И. Уравнения осесимметричных биметаллических упругих оболочек // Инженерный сборник. – 1954. – Т. XVIII. – С. 89–98.
- Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
- Григолюк Э.И., Шалапилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
- Гаврюшин С.С. Алгоритмы исследования больших прогибов гибких оболочек методами продолжения и их численная реализация // Труды XVI Межд. конф. по теории оболочек и пластин. – Н.-Новгород, 1993. – С. 80–89.
- Гаврюшин С.С. Разработка методов расчета и проектирования упругих оболочечных конструкций приборных устройств: дисс. ... д-ра наук. – М., 1994. – 316 с.

16. Гаврюшин С.С. Численное моделирование больших прогибов осесимметричного биметаллического купола при термосило-вом нагружении // Труды МГТУ № 566, «Математическое моделирование сложных технических систем». – М.: Изд-во МГТУ, 1995. – С. 49–69.
17. Гаврюшин С.С. Численное моделирование и анализ процессов нелинейного деформирования гибких оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. – 1994. – № 1. – С. 109–119.
18. Гаврюшин С.С., Барышников О.О., Борискин О.Ф. Численные методы в проектировании гибких упругих элементов. – Калуга: ГУП «Облиздат», 2001. – 200 с.
19. Расчет перспективных конструкций актюаторов / С.С. Гаврюшин, А. Макмиллан, А.С. Николаева, Т.Б. Подкопаева // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2015. – № 8 (665). – С. 73–78.
20. Kapitaniak T. Strange non-chaotic transients // Journal of Sound and Vibration. – 1992. – V. 158. – № 1. – P. 189–194.
21. Holms P.J. A nonlinear oscillator with a strange attractor // The Philosophical Transactions of the Royal Society, Ser. A. – 1979. – V. 292. – № 1394. – P. 419–448.
22. Moon F.C. Experimental models for strange attractor vibrations in elastic systems // New approaches to non-linear problems in dynamics: Proc. Conf. – Pacific Grove, Calif., 1979. – Philadelphia, Pa.: SIAM, 1980. – P. 487–495.
23. Yagasaki Takao. Bifurcations and chaos in quasi-periodically forced beam. Theory, simulation and experiment // Journal of Sound and Vibration. – 1995. – V. 183. – № 1. – P. 1–31.
24. Abhyankar N.S., Hall E.K., Hanagud S.V. Chaotic vibrations of beams: numerical solution of partial differential equations // Journal of Applied Mechanics. – 1993. – V. 60. – № 1. – P. 167–174.
25. Lepik Ü. Axisymmetric vibrations of elastic-plastic cylindrical shells by Galerkin's method // International Journal of Impact Engineering. – 1996. – V.18. – № 5. – P. 489–504.
26. Han Qiang, Hu Haiyan, Yang Guitong. A study of chaotic motion in elastic cylindrical shells // European Journal of Mechanics. A. – 1999. – V. 2. – № 18. – P. 351–360.
27. Shahab S., Mirzaeifar R., Bahai H. Coupled modification of natural frequencies and buckling loads of composite cylindrical panels // International Journal of Mechanical Sciences. – 2009. – V. 51. – № 9–10. – P. 708–717.
28. Об устойчивости анизотропных оболочек вращения положительной и отрицательной гауссовых кривизн / А.В. Борисейко, Н.Б. Жукова, Н.П. Семенюк, В.М. Трач // Прикладная механика. – 2010. – Т. 3. – № 46. – С. 30–40.
29. Панкратов В.М., Барулина М.А. Сравнительный анализ различных подходов к расчету собственных частот чувствительных элементов МЭМС-гироскопов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2017. – Т. 18. – № 3. – С. 196–205.
30. Deterministic Chaos in One Dimensional Continuous Systems / J. Awrejcewicz, V.A. Krysko, I.V. Papkova, A.V. Krysko. – Singapore: World Scientific, 2016. – 576 p.
31. Мицкевич С.А., Захарова А.А., Крысько А.В. Установившиеся колебания балочных МЭМС-резонаторов в вязкой среде при действии локальной ударной нагрузки // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Международной научной конференции. – Саратов, 2016. – С. 277–280.
32. Динамика гибких балок при действии ударных нагрузок с учетом белого шума / А.О. Синичкина, Е.Ю. Крылова, С.А. Мицкевич, В.А. Крысько // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78. – № 3. – С. 280–288.
33. Нелинейная динамика вибрационных микромеханических гироскопов (ММГ). Ч. II. Расчет резонатора в виде балки с начальной неправильностью с учетом геометрической нелинейности / А.В. Крысько, М.В. Жигалов, С.А. Мицкевич, Н.А. Загнборода, В.В. Добриян, И.Е. Кутелов, В.А. Крысько // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2012. – Т. 3. – № 1 (67). – С. 7–15.
34. Barulina M.A., Pankratov V.M., Krysko A.V. Mathematical Model of Motion of a Rotary Micromechanical Gyro Sensing Element as an Orthotropic Round Plate Clamped at its Center // 24th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. – Saint Petersburg, Russia, 29–31 May 2017. – P. 399–404.
35. Awrejcewicz J., Krysko A.V. Wavelet-based analysis of parametric vibrations of flexible plates // International Applied Mechanics. – 2003. – V. 39. – № 9. – P. 997–1028.
36. Нелинейная динамика сферических гидроакустических приборов, применяемых в нефтегазовой промышленности / С.А. Мицкевич, И.В. Папкова, А.А. Захарова, А.В. Крысько // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов – 2016. – Т. 327. – № 11. – С. 17–23.
37. Noisy contact interactions of multi-layer mechanical structures coupled by boundary conditions // J. Awrejcewicz, V.A. Krysko-jr, T.V. Yakovleva, V.A. Krysko // Journal of Sound and Vibration. – 2016. – V. 369. – P. 77–86.
38. Awrejcewicz J., Krysko-jr. V.A., Yakovleva T.V., Krysko V.A. Alternating chaos versus synchronized vibrations of interacting plate with beams // International Journal of Non-Linear Mechanics. – January 2017. – V. 88. – P. 21–30.
39. Власов В.З. Избранные труды. Общая теория оболочек. Т. 1. – М.: Изд-во Академии наук СССР, 1962. – 528 с.
40. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. – Berlin: Springer-Verlag, 1958. – 684 p.
41. Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // Journal of Applied Physics. – 1956. – V. 27. – P. 240–253.

Поступила 14.09.2017 г.

Информация об авторах

Мицкевич С.А., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа Физико-технического института Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина.

Жигалов М.В., доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования Физико-технического института Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина.

Захарова А.А., доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой инженерной графики и промышленного дизайна Физико-технического института Национального исследовательского Томского политехнического университета.

Крысько В.А., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и моделирования Физико-технического института Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина.

UDC 539.3

NONLINEAR DYNAMICS OF MICROELECTROMECHANICAL SYSTEM RESONATORS IN THE FORM OF RECTANGULAR-PLAN SPHERICAL SHELLS TAKING INTO ACCOUNT GEOMETRICAL AND PHYSICAL NON-LINEARITY

Svetlana A. Mitskevich¹,
svetlana.mitskevich@gmail.com

Maksim V. Zhigalov¹,
zhigalovm@yandex.ru

Alena A. Zakharova²,
zaa@tpu.ru

Vadim A. Krysko¹,
tak.@san.ru

¹ Yuri Gagarin Saratov State Technical University,
77, Politechnicheskaya street, Saratov, 410054, Russia.

² National Research Tomsk Polytechnic University,
30, Lenin Avenue, Tomsk, 634050, Russia.

The relevance. Due to the fact that mineral exploration is a high-tech process, the development of methods of constructing new mathematical models, most closely taking into account the true elements of microelectromechanical systems, is important. Microelectromechanical system is a promising instrument of modern Microsystems technology, intensively and dynamically developing scientific and technical direction. The systems are characterized by the unique small weight and size, low power consumption, capable of functioning in harsh environments and the cost, which is several times lower than that of their traditional analogues.

The main aim of the study is to construct the mathematical model, which would reflect more complete the real operation of microelectromechanical systems devices. To do this, one should consider large displacements, stress-strain nonlinear dependence, impact load, temperature field. To design the numerical methods that will allow us to consider a distributed mechanical structure as a system with infinite number degrees of freedom; to analyze the nature of complex nonlinear oscillations of the developed mathematical models; to identify the areas of unstable solution of the considered elements of microelectromechanical systems devices, associated with chaotic oscillations.

The methods: variational methods, methods of mathematical physics, computational methods to reduce the equations to the Cauchy problem – the method of finite differences of the 2nd order of accuracy; solution of the Cauchy problem by the methods of Runge–Kutta; methods of qualitative study of nonlinear dynamics: Fourier transform, wavelet analysis, Poincare section, phase portrait.

The results and conclusions. It is established that the transients depend on the geometrical and physical parameters of the shell, the frequency of the driving oscillations and other parameters, i. e. there is no a unified scenario of transition from harmonic oscillations to chaotic ones. The character of oscillations depends substantially on the intensity of deformation. The authors have revealed that the most common scenario is the Ruelle–Takens one. For some values of curvature the modifications of this script were obtained.

Key words:

Nonlinear dynamics, shell, geometric nonlinearity, physical nonlinearity.

The research was supported by the RSF grant no. 16–19–10290.

REFERENCES

1. Wiener N. *Cybernetics: Control and Communication in the Animal and the Machine*. 2nd ed. Cambridge, Mass., the MIT Press, 1961. 212 p.
2. Christiansen D., Alexander C.K., Jurgen R.K. *Standard book of electronic engineering*. New York, McGraw-Hill Professional, 2004. 220 p.
3. Nurilin Yu.R., Pyatyshev E.N. Microtechnology and microelectromechanical systems is a promising research and innovation direction. *Kompetentnost*, 2006, no. 5–6, pp. 3–9. In Rus.
4. Lyuminarskiy I.E. *Razrabotka nauchnykh metodov rascheta natsionarnogo vzaimodeystviya tonkostennykh elementov s zheshtimi odnostoronnimi svyazyami i matematicheskikh modeley volnovykh peredach*. Dis. Dokt. nauk [Development of scientific methods for calculating unsteady interaction of thin-walled elements with rigid unilateral constraints and mathematical models of the wave gear. Dr. Diss.]. Moscow, 2009. 365 p.
5. Timoshenko S.P. Analysis of bimetal thermostat. *Journal of the optical society of America and review of the Scientific Instruments*, 1925, vol. 11, no. 3, pp. 233–255.
6. Wittrick W.H., Myers D.M., Blumden W.H. Stability of bimetallic disk. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1953, vol. 6, no. 1, pp. 15–31.
7. Grigolyuk E.I. O peremeshcheniyakh pologikh termobimetallicheskih polos [On movement of gentle thermos-bimetallic strips]. *Trudy MVTU im. N. E. Baumana*, 1950, Iss. 11, no. 1, pp. 40–45.
8. Grigolyuk E.I. O ravnovesii i ustoychivosti bimetallicheskih polos [On equilibrium and stability of bimetallic poles]. *Inzhenernyy sbornik AN SSSR*, 1950, vol. 7, pp. 89–97.
9. Grigolyuk E.I. Temperaturnye napryazheniya v krugloy sploshnoy bimetallicheskoj plastinke [Thermal stresses in circular solid bimetal plate]. *Trudy kaf. Sopromat MVTU*, 1947, vol. 3, pp. 55–69.

10. Grigolyuk E.I. Tonkie bimetallicheskie obolochki i plastiny [Thin bimetallic shells and plates]. *Inzhenernyy sbornik*, 1953, vol. XVII, pp. 69–120.
11. Grigolyuk E.I. Uravneniya osesimmetrichnykh bimetallicheskiikh uprugikh obolochek [The equations of axisymmetric bimetallic elastic shells]. *Inzhenernyy sbornik*, 1954, vol. XVIII, pp. 89–98.
12. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. *Ustoychivost obolochek* [Stability of shells]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 360 p.
13. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineynogo deformirovaniya: metod prodolzheniya resheniya po parametru v nelineynykh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela* [Problems of nonlinear deformation: method of solution continuation by the parameter in nonlinear problems of mechanics of deformable bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 232 p.
14. Gavryushin S.S. Algoritmy issledovaniya bolshikh progibov gibkikh obolochek metodami prodolzheniya i ikh chislennaya realizatsiya [Algorithms for analysis of large deflections of flexible shells continue methods and their numerical implementation]. *Trudy XVI Mezhd. konf. po teorii obolochek i plastin* [Proc. of the conference on the theory of shells and plates] N.-Novgorod, 1993. pp. 80–89.
15. Gavryushin S.S. *Razrabotka metodov rascheta i proektirovaniya uprugikh obolocheknykh konstruksiy pribornyykh ustroystv*. Dis. Dokt. nauk [Development of methods of calculation and design of elastic shell structures of equipment devices. Dr. Diss.]. Moscow, 1994. 316 p.
16. Gavryushin S.S. Chislennoe modelirovanie bolshikh progibov osesimmetrichnogo bimetallicheskogo kupola pri termosilovom nagruzhении [Numerical modeling of large deflections of axisymmetric bimetallic dome under thermal and force loadings]. *Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem: Trudy MGTU № 566* [Mathematical modeling of complex engineering systems. MGTU Proc. no. 566]. Moscow, MGTU Publ., 1995. pp. 49–69.
17. Gavryushin S.S. Chislennoe modelirovanie i analiz protsessov nelineynogo deformirovaniya gibkikh obolochek [Numerical modeling and analysis of nonlinear processes of deformation of flexible shells]. *Mechanics of Solids*, 1994, no. 1, pp. 109–119.
18. Gavryushin S.S., Baryshnikova O.O., Boriskin O.F. *Chislennyye metody v proektirovanii gibkikh uprugikh elementov* [Numerical methods in the design of flexible elastic elements]. Kaluga, Oblizdat Publ., 2001. 200 p.
19. Gavryushin S.S., Makmillan A., Nikolaeva A.S., Podkopayeva T.B. Calculations of Actuator Promising Designs. *Proceeding of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2015, no. 8 (665), pp. 73–78. In Rus.
20. Kapitaniak T. Strange non-chaotic transients. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, vol. 158, no. 1, pp. 189–194.
21. Holms P.J. A nonlinear oscillator with a strange attractor. *The Philosophical Transactions of the Royal Society, Ser. A*, 1979, vol. 292, no. 1394, pp. 419–448.
22. Moon F.C. Experimental models for strange attractor vibrations in elastic systems. *New approaches to non-linear problems in dynamics. Proc. Conf.* Pacific Grove, Calif., 1979. Philadelphia, Pa., SIAM, 1980. pp. 487–495.
23. Yagasaki Takao. Bifurcations and chaos in quasi-periodically forced beam. Theory, simulation and experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, vol. 183, no. 1, pp. 1–31.
24. Abhyankar N.S., Hall E.K., Hanagud S.V. Chaotic vibrations of beams: numerical solution of partial differential equations. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1993, vol. 60, no. 1, pp. 167–174.
25. Lepik Ü. Axisymmetric vibrations of elastic-plastic cylindrical shells by Galerkin's method. *International Journal of Impact Engineering*, 1996, vol. 18, no. 5, pp. 489–504.
26. Han Qiang, Hu Haiyan, Yang Guitong. A study of chaotic motion in elastic cylindrical shells. *European Journal of Mechanics. A*, 1999, vol. 2, no. 18, pp. 351–360.
27. Shahab S., Mirzaeifar R., Bahai H. Coupled modification of natural frequencies and buckling loads of composite cylindrical panels. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2009, vol. 51, no. 9–10, pp. 708–717.
28. Boriseyko A.V., Zhukova N.B., Semenyuk N.P., Trach V.M. On the stability of anisotropic shells of revolution with positive and negative Gaussian curvatures. *International Applied Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 46, pp. 30–40. In Rus.
29. Pankratov V.M., Barulina M.A. A comparative analysis of different approaches to calculating the natural frequencies of the sensitive elements of MEMS gyroscopes. *Mechatronics, automation, control*, 2017, vol. 18, no. 3, pp. 196–205. In Rus.
30. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. *Deterministic Chaos in One Dimensional Continuous Systems*. Singapore, World Scientific, 2016. 576 p.
31. Mitskevich S.A., Zakharova A.A., Krysko A.V. Ustanovivshiesya kolebaniya balochnykh mems-rezonatorov v vyzkoy srede pri deystvii lokalnoy udarnoy nagruzki [Steady-state vibrations of beam MEMS resonators in a viscous medium under the influence of a local shock loads]. *Kompyuternyye nauki i informatsionnyye tekhnologii. Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii*. [Computer sciences and information technologies. International conference]. Saratov, 2016. pp. 277–280.
32. Sinichkina A.O., Krylova E.Ysu., Mitskevich S.A., Krysko V.A. Dynamics of flexible beams under the action of shock loads taking into account white noise. *Journal Problems of Strength and Plasticity*, 2016, vol. 78, no. 3, pp. 280–288. In Rus.
33. Krysko A.V., Zhigalov M.V., Mitskevich S.A., Zagniboroda N.A., Dobriyan V.V., Kutepov I.E., Krysko V.A. Nonlinear dynamics of a vibratory micromechanical gyroscopes (MMG). P. II. Calculation of the resonator in the form of a beam with an initial irregularity taking into account the geometric nonlinearity. *Vestnik Saratov State Technical University*, 2012, vol. 3, no. 1 (67), pp. 7–15. In Rus.
34. Barulina M.A., Pankratov V.M., Krysko A.V. Mathematical Model of Motion of a Rotary Micromechanical Gyro Sensing Element as an Orthotropic Round Plate Clamped at its Center. *24th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*. Saint Petersburg, Russia, 29–31 May 2017. pp. 399–404.
35. Awrejcewicz J., Krysko A.V. Wavelet-based analysis of parametric vibrations of flexible plates. *International Applied Mechanics*, 2003, vol. 39, no. 9, pp. 997–1028.
36. Mitskevich S.A., Papkova I.V., Zakharova A.A., Krysko A.V. Nonlinear dynamics of spherical hydroacoustic devices used in oil and gas industry. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2016, vol. 327, no. 11, pp. 17–23. In Rus.
37. Awrejcewicz J., Krysko-jr. V.A., Yakovleva T.V., Krysko V.A. Noisy contact interactions of multi-layer mechanical structures coupled by boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, vol. 369, pp. 77–86.
38. Awrejcewicz J., Krysko-jr. V.A., Yakovleva T.V., Krysko V.A. Alternating chaos versus synchronized vibrations of interacting plate with beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, January 2017, vol. 88, pp. 21–30.
39. Vlasov V.Z. *Izbrannyye trudy. Obshchaya teoriya obolochek* [Selected works. General theory of shells]. Moscow, Academy of Sciences of the USSR Press, 1962. Vol. 1, 528 p.
40. Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik* [Nonlinear mechanics]. Berlin, Springer-Verlag, 1958. 684 p.
41. Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of Applied Physics*, 1956, vol. 27, pp. 240–253.

Received: 14 September 2017.

Information about the authors

Svetlana A. Mitskevich, Cand. Sc., associate professor, Yuri Gagarin Saratov State Technical University.

Maksim V. Zhigalov, Dr. Sc., professor, Yuri Gagarin Saratov State Technical University.

Alena A. Zakharova, Dr. Sc., professor, head of the department, National Research Tomsk Polytechnic University.

Vadim A. Krysko, Dr. Sc., professor, head of the department, Yuri Gagarin Saratov State Technical University.