УДК 621.52+511.52

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

Симонян Саргис Оганесович,
д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой информационных технологий
и автоматизации Национального политехнического университета Армении
(Политехник), Республика Армения, 0009, г. Ереван, ул. Теряна, 105.
E-mail: ssimonyan@seua.am

Актуальность работы *обусловлена необходимостью эффективного определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза, достаточно часто встречающихся при решении различных задач науки и техникии, как частного случая, действительных обобщенных обратных матриц, широко используемых в различных геоинформационных системах.*

Цель исследования: *разработка конструктивных аналитических и численно-аналитических методов определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза.*

Методы исследования. *При решении рассматриваемой задачи были использованы методы линейной алгебры, методы теории матриц, а также прямые и обратные дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова, отличающиеся от общеизвестных интегральных преобразований тем, что переход из области оригиналов в область изображений осуществляется в общем случае на основе более простой операции – операции дифференцирования (в отличие от операции интегрирования при интегральных преобразованиях), а обратный переход – также на основе простой операции суммирования (в отличие от операции интегрирования при интегральных преобразованиях).*

Результаты. *Предложены конструктивные аналитические и численно-аналитические методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза. Аналитические методы основаны на предложенных декомпозиционных матрично-блочных представлениях, а численно-аналитические методы – на совместном использовании этих представлений и дифференциальных преобразований. Если аналитические методы практически применимы при малых размерах рассматриваемых матриц и простых их аналитических элементах, то численно-аналитические методы применимы в общем случае. С другой стороны, фактически решение исходной непрерывной задачи сводится к решению некоторой рекуррентной цепочки ряда дискретных задач с числовыми решениями (на первом этапе вычислений), а затем к восстановлению на их основе непрерывного решения исходной непрерывной задачи (на втором этапе вычислений). Эти обстоятельства обуславливают простоту реализации численно-аналитических методов применением средств современных информационных технологий.*

Ключевые слова:
Геоинформатика, геоинформационные технологии и системы, метод наименьших квадратов, комплексные однопараметрические матрицы, обобщенные обратные матрицы, декомпозиция, матрично-блочные представления, дифференциальные преобразования, матричные дискреты, матрично-блочно-столбцевой эквивалент, матрично-блочно-строчный эквивалент.

Введение

Обобщенные обратные матрицы широко используются в различных областях науки и техники [1-9] и, в частности, при решении нормальных уравнений свободных геодезических сетей [8], параметрических и стохастических задач астрометрии и космической геодезии [9], планирования и оптимизации горных работ [10] и др. Следовательно, разработка эффективных методов их определения является важной научно-практической задачей специального математического обеспечения геоинформационных систем с широким использованием возможностей современных компьютерных технологий и геостатистики [10-12].

При однопараметрических матрицах $A(t)_{n\times m}$ (параметр t может быть временем, оператором Лапласа $\left(S \sim \frac{d}{dt}\right)$ или другим параметром) для определения соответствующих обобщенных обратных матриц $X(t)=A^{+}(t)_{n\times m}$ Мура–Пенроуза [1] на основе дифференциальных преобразований Пухова [13–16] в работах [17–21] были предложены различные дифференциальные аналоги определения этих матриц. В настоящей работе рассматриваются комплексные однопараметрические матрицы и предлагаются соответствующие им конструктивные декомпозиционные аналитические и численно-аналитические методы определения $X(t)=A^{+}(t)_{n\times m}$. Заметим, что для этих матриц должны быть выполнены следующие обобщенные условия Мура–Пенроуза

$$A(t)X(t)A(t) = A(t), \tag{1}$$

$$X(t)A(t)X(t) = X(t), \tag{2}$$

$$[A(t)X(t)]^{*} = A(t)X(t), \tag{3}$$

$$[X(t)A(t)]^{*} = X(t)A(t), \tag{4}$$

где символ * – знак комплексного сопряжения.

Математический аппарат

Комплексную однопараметрическую матрицу $A(t)_{n\times m}$ представим в виде декомпозиционного соотношения

$$A(t)_{m\times n} = B(t)_{m\times n} + jC(t)_{m\times n}, \tag{5}$$

а соответствующую ей обобщенную обратную матрицу – в виде соотношения

$$X(t)_{n\times m} = A^{+}(t)_{n\times m} = F(t)_{n\times m} + jG(t)_{n\times m}. \tag{6}$$

В соотношениях (5), (6) матрицы $B(t)$ и $F(t)$ – матрицы действительных частей, матрицы $C(t)$ и $G(t)$ – матрицы мнимых частей матриц $A(t)$ и $X(t)$ соответственно, а $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Пусть существуют дифференциальные преобразования однопараметрических матриц $B(t)$, $C(t)$ и $F(t)$, $G(t)$, т. е.

$$B(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K B(t)}{\partial t^K}\bigg|_{t=t_\upsilon},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteqdot$$

$$\doteqdot\ B(t)=\aleph_1(t,t_\upsilon,H,B(K),\ K=\overline{0,\infty}); \tag{7}$$

$$C(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K C(t)}{\partial t^K}\bigg|_{t=t_\upsilon},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteqdot$$

$$\doteqdot\ C(t)=\aleph_2(t,t_\upsilon,H,C(K),\ K=\overline{0,\infty}); \tag{8}$$

$$F(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K F(t)}{\partial t^K}\bigg|_{t=t_\upsilon},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteqdot$$

$$\doteqdot\ F(t)=\aleph_3(t,t_\upsilon,H,F(K),\ K=\overline{0,\infty}); \tag{9}$$

$$G(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K G(t)}{\partial t^K}\bigg|_{t=t_\upsilon},\ K=\overline{0,\infty}\ \doteqdot$$

$$\doteqdot\ G(t)=\aleph_4(t,t_\upsilon,H,G(K),\ K=\overline{0,\infty}). \tag{10}$$

В соотношениях (7)–(10) левые части – прямые преобразования; правые части – обратные преобразования; $K=\overline{0,\infty}$ целочисленный аргумент; $B(K)$, $C(K)$ и $F(K)$, $G(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты матричных оригиналов $B(t)$, $C(t)$ и $F(t)$, $G(t)$ соответственно с размерами $m\times n$ и $n\times m$; t_υ – центр аппроксимации; $\aleph_1(\bullet)$, $\aleph_2(\bullet)$ и $\aleph_3(\bullet)$, $\aleph_4(\bullet)$ – матричные функции, восстанавливающие оригиналы – матрицы $B(t)$, $C(t)$ и $F(t)$, $G(t)$ соответственно; символ $\doteqdot$ – знак перехода из области оригиналов в область D-изображений и наоборот [13–16].

Теперь воспользуемся подходом, предложенным в [21], и представим новые аналитические и численно-аналитические методы определения обобщенных обратных матриц $X(t)_{n\times m}=A^{+}(t)\in C^{n\times m}$.

<u>**Аналитическое решение (1-й вариант)**</u>. Потребуем, чтобы имело место следующее известное условие [2]:

$$A^T(t)A(t)X(t)=A^T(t). \tag{11}$$

С учетом (5) и (6) условие (11) приобретает вид:

$$[B(t)+jC(t)]^T[B(t)+jC(t)][F(t)+jG(t)]=$$
$$=[B(t)+jC(t)]^T. \tag{12}$$

Раскрыв (12) и приравнивая действительные и мнимые матричные слагаемые в левой и правой частях, получим

$$\begin{cases}[B^T(t)B(t)-C^T(t)C(t)]F(t)-\\ -[B^T(t)C(t)+C^T(t)B(t)]G(t)=B^T(t),\\ [B^T(t)C(t)+C^T(t)B(t)]F(t)+\\ +[B^T(t)B(t)-C^T(t)C(t)]G(t)=C^T(t).\end{cases} \tag{13}$$

Систему матричных уравнений (13) можно представить и в виде следующего матрично-блочно-столбцевого эквивалента

$$\left[\begin{array}{c|c}\begin{bmatrix}B^T(t)B(t)-\\ -C^T(t)C(t)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-B^T(t)C(t)-\\ -C^T(t)B(t)\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}B^T(t)C(t)+\\ +C^T(t)B(t)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}B^T(t)B(t)-\\ -C^T(t)C(t)\end{bmatrix}\end{array}\right]_{2n\times 2n}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c}F(t)\\ \hline G(t)\end{array}\right]_{2n\times m}=\left[\begin{array}{c}B^T(t)\\ \hline C^T(t)\end{array}\right]_{2n\times m}, \tag{14}$$

откуда можно найти аналитическое решение

$$\left[\begin{array}{c}F(t)\\ \hline G(t)\end{array}\right]_{2n\times m}=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c}\begin{bmatrix}B^T(t)B(t)-\\ -C^T(t)C(t)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-B^T(t)C(t)-\\ -C^T(t)B(t)\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}B^T(t)C(t)+\\ +C^T(t)B(t)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}B^T(t)B(t)-\\ -C^T(t)C(t)\end{bmatrix}\end{array}\right]^{-1}_{2n\times 2n}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c}B^T(t)\\ \hline C^T(t)\end{array}\right]_{2n\times m}=$$

$$=\left[\left[\begin{array}{c|c}B^T(t) & -C^T(t)\\ \hline C^T(t) & B^T(t)\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}B(t) & -C(t)\\ \hline C(t) & B(t)\end{array}\right]\right]^{-1}_{2n\times 2n}\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c}B^T(t)\\ \hline C^T(t)\end{array}\right]_{2n\times m}=Д_1^{-1}(B(t),C(t))\left[\begin{array}{c}B^T(t)\\ \hline C^T(t)\end{array}\right] \tag{15}$$

и, следовательно, в соответствии с (6) и неизвестную матрицу $X(t)=A^{+}(t)$.

<u>**Аналитическое решение (2-й вариант).**</u> В соответствии с [6] потребуем, чтобы имело место также известное условие [2]:

$$X(t)A(t)A^T(t)=A^T(t). \tag{16}$$

С учетом (5) и (6) условие (16) приобретает вид:

$$[F(t)+jG(t)][B(t)+jC(t)][B(t)+jC(t)]^T=$$
$$=[B(t)+jC(t)]^T. \tag{17}$$

Аналогичные преобразования (17) приводят к следующей системе матричных уравнений

$$\begin{cases}F(t)[B(t)B^T(t)-C(t)C^T(t)]-\\ -G(t)[C(t)B^T(t)+B(t)C^T(t)]=B^T(t),\\ F(t)[B(t)C^T(t)+C(t)B^T(t)]-\\ -G(t)[C(t)C^T(t)-B(t)B^T(t)]=C^T(t).\end{cases} \tag{18}$$

Систему (18) можно представить и в виде следующего матрично-блочно-строчного эквивалента

$$[F(t) \mid G(t)] \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B(t)B^T(t) - \\ -C(t)C^T(t) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(t)C^T(t) + \\ +C(t)B^T(t) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -B(t)C^T(t) - \\ -C(t)B^T(t) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(t)B^T(t) - \\ -C(t)C^T(t) \end{bmatrix} \end{array}\right] =$$

$$= [B^T(t) \mid C^T(t)], \tag{19}$$

откуда аналитическое решение

$$[F(t) \mid G(t)]_{n\times 2m} = [B^T(t) \mid C^T(t)] \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B(t)B^T(t) - \\ -C(t)C^T(t) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(t)C^T(t) + \\ +C(t)B^T(t) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -B(t)C^T(t) - \\ -C(t)B^T(t) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(t)B^T(t) - \\ -C(t)C^T(t) \end{bmatrix} \end{array}\right]^{-1} =$$

$$= [B^T(t) \mid C^T(t)]_{n\times 2m} \times$$

$$\times \left[\left[\begin{array}{c|c} B(t) & C(t) \\ \hline -C(t) & B(t) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B^T(t) & C^T(t) \\ \hline -C^T(t) & B^T(t) \end{array}\right] \right]^{-1}_{2m\times 2m} =$$

$$= [B^T(t) \mid C^T(t)] Д_2^{-1}(B(t), C(t)). \tag{20}$$

Заметим, что аналитические решения (15) и (20) практически применимы при малых размерах m и n матриц $A(t)$ с аналитическими элементами.

Численно-аналитическое решение (1-й вариант). В соответствии с дифференциальными изображениями оригиналов-произведений, состоящих из трех сомножителей [8. С. 72; Ф. (4.7)], для матричных оригиналов-произведений, входящих в матрично-блочно-столбцевой эквивалент (14), будем иметь:

$$\begin{aligned} & B^T(t)B(t)F(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} B^T(K-l) \sum_{m=0}^{l} B(m)F(l-m), \\ & C^T(t)C(t)F(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} C^T(K-l) \sum_{m=0}^{l} C(m)F(l-m), \\ & B^T(t)C(t)G(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} B^T(K-l) \sum_{m=0}^{l} C(m)G(l-m), \\ & C^T(t)B(t)G(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} C^T(K-l) \sum_{m=0}^{l} B(m)G(l-m), \\ & B^T(t)C(t)F(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} B^T(K-l) \sum_{m=0}^{l} C(m)F(l-m), \\ & C^T(t)B(t)F(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} C^T(K-l) \sum_{m=0}^{l} B(m)F(l-m), \\ & B^T(t)B(t)G(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} B^T(K-l) \sum_{m=0}^{l} B(m)G(l-m), \\ & C^T(t)C(t)G(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} C^T(K-l) \sum_{m=0}^{l} G(m)G(l-m). \end{aligned} \tag{21}$$

С учетом соотношений (21) перевод (14) из области оригиналов в область дифференциальных изображений дает:

при $K=0$:

$$\left[\begin{array}{c} F(0) \\ \hline G(0) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B^T(0)B(0) - \\ -C^T(0)C(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -B^T(0)C(0) - \\ -C^T(0)B(0) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} B^T(0)C(0) + \\ +C^T(0)B(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B^T(0)B(0) - \\ -C^T(0)C(0) \end{bmatrix} \end{array}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c} B^T(0) \\ \hline C^T(0) \end{array}\right] = Д_1^{-1}(B(0), C(0)) \left[\begin{array}{c} B^T(0) \\ \hline C^T(0) \end{array}\right], \tag{22}$$

при $K=1$:

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B^T(0)B(0) - \\ -C^T(0)C(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -B^T(0)C(0) - \\ -C^T(0)B(0) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} B^T(0)C(0) + \\ +C^T(0)B(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B^T(0)B(0) - \\ -C^T(0)C(0) \end{bmatrix} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} F(1) \\ \hline G(1) \end{array}\right] +$$

$$+ \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B^T(0)B(1) - \\ -C^T(0)C(1) + \\ +B^T(1)B(0) - \\ -C^T(1)C(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -B^T(0)C(1) - \\ -C^T(0)B(1) - \\ -B^T(1)C(0) - \\ -C^T(1)B(0) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} B^T(0)C(1) + \\ +C^T(0)B(1) + \\ +B^T(1)C(0) + \\ +C^T(1)B(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B^T(0)B(1) - \\ -C^T(0)C(1) + \\ +B^T(1)B(0) - \\ -C^T(1)C(0) \end{bmatrix} \end{array}\right] \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c} F(0) \\ \hline G(0) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} B^T(1) \\ \hline C^T(1) \end{array}\right],$$

откуда

$$\left[\begin{array}{c} F(1) \\ \hline G(1) \end{array}\right] = Д_1^{-1}(B(0), C(0)) \times$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} B^T(1) \\ \hline C^T(1) \end{array}\right] - \\ - \left[\begin{array}{c|c} \left[\sum\limits_{l=0}^{1} \begin{pmatrix} (B^T(l)B(1-l) - \\ -C^T(l)C(1-l)) \end{pmatrix} \right] & -\left[\sum\limits_{l=0}^{1} \begin{pmatrix} (B^T(l)C(1-l) + \\ +C^T(l)B(1-l)) \end{pmatrix} \right] \\ \hline \left[\sum\limits_{l=0}^{1} \begin{pmatrix} (B^T(l)C(1-l) + \\ +C^T(l)B(1-l)) \end{pmatrix} \right] & \left[\sum\limits_{l=0}^{1} \begin{pmatrix} (B^T(l)B(1-l) - \\ -C^T(l)C(1-l)) \end{pmatrix} \right] \end{array}\right] \times \\ \times \left[\begin{array}{c} F(0) \\ \hline G(0) \end{array}\right] \end{array}\right], \tag{23}$$

…

при $K=K$:

$$\left[\begin{array}{c} F(K) \\ \hline G(K) \end{array}\right]_{2n\times m} = \text{Д}_1^{-1}(B(0),C(0)) \times$$

$$\times\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} B^T(K) \\ \hline C^T(K) \end{array}\right] - \\ -\left[\begin{array}{c|c} \left[\sum\limits_{l=0}^{K}\begin{pmatrix} (B^T(l)B(K-l)- \\ -C^T(l)C(K-l)) \end{pmatrix}\right] & -\left[\sum\limits_{l=0}^{K}\begin{pmatrix} (B^T(l)C(K-l)+ \\ +C^T(l)B(K-l)) \end{pmatrix}\right] \\ \hline \left[\sum\limits_{l=0}^{K}\begin{pmatrix} (B^T(l)C(K-l)+ \\ +C^T(l)B(K-l)) \end{pmatrix}\right] & \left[\sum\limits_{l=0}^{K}\begin{pmatrix} (B^T(l)B(K-l)- \\ -C^T(l)C(K-l)) \end{pmatrix}\right] \end{array}\right]\times \\ \times\left[\begin{array}{c} F(0) \\ \hline G(0) \end{array}\right] \end{array}\right] =$$

$$= \text{Д}_1^{-1}(B(0),C(0)) \times$$

$$\times\left[\left[\begin{array}{c} B^T(K) \\ \hline C^T(K) \end{array}\right] - \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{l=0}^{K}\left[\begin{array}{c|c} B^T(l) & -C^T(l) \\ \hline C^T(l) & B^T(l) \end{array}\right]\times \\ \times\left[\begin{array}{c|c} B(K-l) & -C(K-l) \\ \hline C(K-l) & B(K-l) \end{array}\right] \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} F(0) \\ \hline G(0) \end{array}\right]\right] =$$

$$= \text{Д}_1^{-1}(B(0),C(0))_{2n\times 2n} \times$$

$$\times\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} B^T(K) \\ \hline C^T(K) \end{array}\right]_{2n\times m} - \\ -\left[\sum\limits_{l=0}^{K}\text{Д}_1(B(l),B(K-l);C(l),C(K-l))\right]_{2n\times 2n}\left[\begin{array}{c} F(0) \\ \hline G(0) \end{array}\right]_{2n\times m} \end{array}\right]. \quad (24)$$

Итак, имея матричные дискреты $F(0)$, $G(0)$; $F(1)$, $G(1)$; ... $F(K)$, $G(K)$ с учетом (22)–(24), в соответствии с правыми частями (9) и (10) можно восстановить оригиналы $F(t)$ и $G(t)$, и, следовательно,

$$X(t) = A^{+}(t) = F(t) + jG(t).$$

<u>Численно-аналитическое решение (2-й вариант).</u> Для матричных оригиналов-произведений, входящих в матрично-блочно-строчный эквивалент (19) аналогично (21), будем иметь:

$$F(t)B(t)B^T(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} F(K-l)\sum_{m=0}^{l} B(m)B^T(l-m),$$

$$F(t)C(t)C^T(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} F(K-l)\sum_{m=0}^{l} C(m)C^T(l-m),$$

$$G(t)B(t)C^T(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} G(K-l)\sum_{m=0}^{l} B(m)C^T(l-m),$$

$$G(t)C(t)B^T(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} G(K-l)\sum_{m=0}^{l} C(m)B^T(l-m), \quad (25)$$

$$F(t)B(t)C^T(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} F(K-l)\sum_{m=0}^{l} B(m)C^T(l-m),$$

$$F(t)C(t)B^T(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} F(K-l)\sum_{m=0}^{l} C(m)B^T(l-m),$$

$$G(t)B(t)B^T(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} G(K-l)\sum_{m=0}^{l} B(m)B^T(l-m),$$

$$G(t)C(t)C^T(t) \doteq \sum_{l=0}^{K} G(K-l)\sum_{m=0}^{l} C(m)C^T(l-m).$$

С учетом соотношений (25) перевод (19) из области оригиналов в область дифференциальных изображений дает:

при $K=0$:

$$[F(0) \mid G(0)] = [B^T(0) \mid C^T(0)] \times$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B(0)B^T(0)- \\ -C(0)C^T(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(0)C^T(0)+ \\ +C(0)B^T(0) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -B(0)C^T(0)- \\ -C(0)B^T(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(0)B^T(0)- \\ -C(0)C^T(0) \end{bmatrix} \end{array}\right]^{-1} =$$

$$= [B^T(0) \mid C^T(0)]\text{Д}_2^{-1}(B(0),C(0)), \quad (26)$$

при $K=1$:

$$[F(1) \mid G(1)]\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B(0)B^T(0)- \\ -C(0)C^T(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(0)C^T(0)+ \\ +C(0)B^T(0) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -B(0)C^T(0)- \\ -C(0)B^T(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(0)B^T(0)- \\ -C(0)C^T(0) \end{bmatrix} \end{array}\right] +$$

$$+[F(0) \mid G(0)] \times$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} B(0)B^T(1)- \\ -C(0)C^T(1)+ \\ +B(1)B^T(0)- \\ -C(1)C^T(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(0)C^T(1)+ \\ +C(0)B^T(1)+ \\ +B(1)C^T(0)+ \\ +C(1)B^T(1) \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} -B(0)C^T(1)- \\ -C(0)B^T(1)- \\ -B(1)C^T(0)- \\ -C(1)B^T(0) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B(0)B^T(1)- \\ -C(0)C^T(1)+ \\ +B(1)B^T(0)- \\ -C(1)C^T(0) \end{bmatrix} \end{array}\right] =$$

$$= [B^T(1) \mid C^T(1)],$$

откуда

$$[F(1) \mid G(1)] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} [B^T(1) \mid C^T(1)] - [F(0) \mid G(0)] \times \\ \times\left[\begin{array}{c|c} \left[\sum\limits_{l=0}^{1}\begin{pmatrix} (B(l)B^T(1-l)- \\ -C(l)C^T(1-l)) \end{pmatrix}\right] & \left[\sum\limits_{l=0}^{1}\begin{pmatrix} (B(l)C^T(1-l)+ \\ +C(l)B^T(1-l)) \end{pmatrix}\right] \\ \hline \left[-\sum\limits_{l=0}^{1}\begin{pmatrix} (B(l)C^T(1-l)+ \\ +C(l)B^T(1-l)) \end{pmatrix}\right] & \left[\sum\limits_{l=0}^{1}\begin{pmatrix} (B(l)B^T(1-l)- \\ -C(l)C^T(1-l)) \end{pmatrix}\right] \end{array}\right] \end{array}\right] \times$$

$$\times \text{Д}_2^{-1}(B(0),C(0)), \quad (27)$$

...

при $K=K$:

$$[F(K) \mid G(K)]_{n\times 2m} =$$
$$=\left[\begin{array}{c} [B^T(K) \mid C^T(K)] - [F(0) \mid G(0)] \times \\ \times\left[\begin{array}{c|c} \left[\sum\limits_{l=0}^{K}\begin{pmatrix}(B(l)B^T(K-l)- \\ -C(l)C^T(K-l))\end{pmatrix}\right] & \left[\sum\limits_{l=0}^{K}\begin{pmatrix}(B(l)C^T(K-l)+ \\ +C(l)B^T(K-l))\end{pmatrix}\right] \\ \hline \left[-\sum\limits_{l=0}^{K}\begin{pmatrix}(B(l)C^T(K-l)+ \\ +C(l)B^T(K-l))\end{pmatrix}\right] & \left[\sum\limits_{l=0}^{K}\begin{pmatrix}(B(l)B^T(K-l)- \\ -C(l)C^T(K-l\end{pmatrix})\right] \end{array}\right] \end{array}\right]\times$$
$$\times \text{Д}_2^{-1}(B(0),C(0)) =$$
$$=\left[\begin{array}{c} [B^T(K) \mid C^T(K)] - [F(0) \mid G(0)] \times \\ \times\left[\sum\limits_{l=0}^{K}\left[\begin{array}{c|c} B(l) & C(l) \\ \hline -C(l) & B(l)\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} B^T(K-l) & C^T(K-l) \\ \hline -C^T(K-l) & B^T(K-l)\end{array}\right]\right] \end{array}\right]\times$$
$$\times \text{Д}_2^{-1}(B(0),C(0)) =$$
$$=\left[\begin{array}{c} [B^T(K) \mid C^T(K)]_{n\times 2m} - [F(0) \mid G(0)]_{n\times 2m} \times \\ \times\left[\sum\limits_{l=0}^{K}\text{Д}_2(B(l),B(K-l);C(l),C(K-l))\right]_{2m\times 2m} \end{array}\right]\times$$
$$\text{Д}_2^{-1}(B(0),C(0))_{2m\times 2m}. \tag{28}$$

Аналогично, определив матричные дискреты $F(0),G(0);F(1),G(1);...;F(K),G(K)$ с учетом (26)–(28), в соответствии с правыми частями (9) и (10), также можно восстановить оригиналы $F(t)$ и $G(t)$ и, следовательно,

$$X(t) = A^+(t) = F(t) + jG(t).$$

И, наконец, сделаем несколько замечаний.

Замечание 1. При матрицах с размерами $m>n$, в соответствии с матричными рекуррентными вычислительными соотношениями, естественно, целесообразнее использование схемы (21)–(24), а при матрицах с размерами $m<n$ – использование схемы (25)–(28) из-за малых размеров матриц $\text{Д}_1^{-1}(B(0),C(0))_{2n\times 2n}$ и $\text{Д}_2^{-1}(B(0),C(0))_{2m\times 2m}$ соответственно, ибо основные вычислительные операции связаны с нахождением этих обратных матриц.

Замечание 2. Если в центре аппроксимации t_υ матрица $\text{Д}_1(B(0),C(0))$ или матрица $\text{Д}_2(B(0),C(0))$ вырождаются, т. е. $rang\text{Д}_1(B(0),C(0))<2n$ или $rang\text{Д}_2(B(0),C(0))<2m$, то необходимо поменять t_υ так, чтобы имели место условия $rang\text{Д}_1(B(0),C(0))=2n$ или $rang\text{Д}_2(B(0),C(0))=2m$ и заново выполнить вычисления с самого начала.

Замечание 3. Очевидно, что матрицы

$$\text{Д}_1(B(l),B(K-l);\ C(l),C(K-l)),\ \forall l = 0,K$$

и $$\text{Д}_2(B(l),B(K-l);\ C(l),C(K-l)),\ \forall l = \overline{0,K}$$

являются блочными кососимметрическими относительно первой главной диагонали и блочными симметрическими относительно второй главной диагонали матрицами ввиду кососимметричности и симметричности соответственно их матриц-сомножителей.

Выводы

Предложены конструктивные декомпозиционные аналитические и численно-аналитические методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц, удовлетворяющие обобщенным условиям Мура–Пенроуза (1)–(4). Аналитические методы применимы к матрицам с меньшими размерами и простыми функциональными элементами. Численно-аналитические методы применимы всегда, естественно, при условиях аналитичности всех элементов функциональных матриц в центрах аппроксимации t_υ. Они легко реализуемы средствами современных информационных технологий [22–25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. – 385 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
3. Светлаков А.А. Обобщенные обратные матрицы: некоторые вопросы теории и применения в задачах автоматизации управления процессами. – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 388 с.
4. Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized Inverses: Theory and Applications. – NYC: Springer, 2003. – 435 p.
5. Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized Inverses of Linear Transformations. – Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. – 232 p.
6. Yanai H., Takeuchi K., Takane Y. Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices and Singular Value Decomposition. – NYC: Springer, 2011. – 236 p.
7. Лоусон Ч., Хенсон П. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
8. Ганьшин В.Н. Псевдообращение матрицы нормальных уравнений свободных геодезических сетей // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1989. – Вып. 6. – С. 3–5.
9. Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. – СПб.: Наука,1997. – 319 с.
10. Капустин Ю.Е. Горные компьютерные технологии и геостатистика. – СПб: Недра, 2002. – 424 с.
11. Михалевич И.М. Применение математических методов при анализе геологической информации (с использованием компьютерных технологий: Statistica). – Иркутск: ИГУ, 2006. – Ч. 3. – 115 с.
12. Журкин И.Г., Шайтура С.В. Геоинформационные системы. – М.: КУДИЦ-ПРЕСС, 2009. – 273 с.
13. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка,1984. – 420 с.
14. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наукова думка, 1986. – 158 с.
15. Пухов Г.Е. Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – Киев: Наукова думка, 1988. – 216 с.
16. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова думка, 1990. – 184 с.
17. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Чартарагет, 2010. – 361 с.
18. Симонян С.О. Матрично-векторные представления некоторых вычислительных методов определения параметрических обобщенных обратных матриц // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2013. – Т. 66. – № 4. – С. 370–378.
19. Симонян С.О. Определение квадратных параметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза применением дифференциальных преобразований Пухова // Известия ТПУ. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 6–10.
20. Симонян С.О. Параллельные вычислительные методы определения параметрических обобщенных обратных матриц // Из-

вестия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 5. – С. 10–15.
21. Симонян С.О., Асланян Г.А. Метод определения параметрических B, Q-обобщенно-обратных матриц // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2014. – Т. 67. – № 2. – С. 220–226.
22. Метьюз Дж.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Вильямс, 2001. – 713 с.
23. Шлее М. Qt 4.8. Профессиональное программирование на C++. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 912 с.
24. Stroustrup B. The C++ Programming Language. 4th ed. – Boston: Addison – Wesley Professional, 2013. – 1368 p.
25. The Math Works, Inc., MATLAB The language of technical programming Using MATLAB Graphics, Version 7.

Поступила 06.05.2014 г.

UDC 621.52+511.52

METHODS FOR DETERMINING COMPLEX ONE-PARAMETRIC GENERALIZED INVERSE MATRICES

Sargis H. Simonyan,
Dr. Sc., National Polytechnic University of Armenia (Polytechnic), 105, Teryan street, Yerevan, 0009, Armenia. Email: ssimonyan@seua.am

The relevance *of the research is caused by the necessity of the efficient definition of complex one-parameter generalized inverse matrices of Moore and Penrouse, which are often used when solving various science and engineering problems, and for its special case, definition of real generalized inverse matrices which are widely used in different geo-informational systems.*

The main aim of the research *is to develop the constructive analytical and numeric-analytical methods of determining complex one-parameter generalized inverse matrices of Moore and Penrouse.*

Methods of research. *The author has applied the methods of linear algebra, methods of theory of matrices as well as the direct and reverse differential transformations of G.E. Pukhov, which differ from the well-known integral transformations in the fact that passing from the originals' domain to the domain of its representation is generally implemented on the basis of a more simple operation – differentiation (in comparison with the integration at integral transformations) and the reverse pass is implemented based on a simple operation – addition (in comparison with the integration at integral transformations).*

Results. *The author proposed the constructive analytical and numeric-analytical methods to determine complex one-parameter generalized inverse matrices of Moore and Penrouse The analytical methods are based on the proposed decomposition matrix-pattern presentations, whereas numeric-analytical methods are based on joint use of these presentations and differential transformations. When the analytical methods are in practice applicable for small size matrices discussions and their simple analytical elements, then numeric-analytical methods are applicable for general case. On the other hand, actually the solution of the initial continuous problem brings to the solution of some recurrent chain of a series of discreet problems with numerical solutions (at the first stage of computations), and then to restoration of the continuous problem solution on their basis (at the second stage of computations). The mentioned circumstances define the simplicity of realization of numeric-analytical methods by implementation of the modern means of information technologies.*

Key words:
Geoinformatics, geoinformation technologies and systems, least squares method, complex one-parameter matrices, generalized inverse matrices, decomposition, matrix-pattern presentations, differential transformations, matrix discreets, matrix-pattern-column equivalent, matrix-pattern-row equivalent.

REFERENCES

1. Beklemishev D.V. *Dopolnitelnye glavy lineynoy algebry* [Additional Chapters of Linear Algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 385 p.
2. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 560 p.
3. Svetlakov A.A. *Obobshchennye obratnye matritsy: nekotorye voprosy teorii i primeneniya v zadachakh avtomatizatsii upravleniya protsessami* [Generalized inverse matrices: some issues of theory and application in problems of process control automation]. Tomsk, NTL Publ., 2003. 388 p.
4. Ben-Israel A., Greville T.N.E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. NYC, Springer, 2003. 435 p.
5. Campbell S.L., Meyer C.D. *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. 232 p.
6. Yanai H., Takeuchi K., Takane Y. *Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices and Singular Value Decomposition*. NYC, Springer, 2011. 236 p.
7. Louson C.H., Khenson P. *Chislennoye resheniye zadach metoda naimenshikh kvadratov* [Numerical solution of the least squares method]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 232 p.
8. Ganshin V.N. Psevdoobrashhenye matritsy normalnykh uravneny svobodnykh geodezicheskikh setey [Pseudo-inverse matrix of standard equations in free geodetic networks]. *Izvestiya vuzov. Geodeziya i aerofotosemka*, 1989, Iss. 6, pp. 3-5.
9. Gubanov V.S. *Obobshchenny metod naimenshikh kvadratov. Teoriya i primenenie v astrometrii* [Generalized least square method. Theory and application in astrometry]. St. Petersburg, Nauka Publ., 1997. 319 p.
10. Kapustin Yu.E. *Gornye kompyuternye tekhnologii i geostatistika* [Mining computer technologies and geostatistics]. St. Petersburg, Nedra Publ., 2002. 424 p.
11. Mikhalevich I.M. *Primenenie matematicheskikh metodov pri analize geologicheskoy informatsii (s ispolzovaniem kompyuternykh tekhnology: Statistica)* [Application of mathematical methods when analyzing geological information (using computer technique: Statistica)]. Irkutsk, IGU Press, 2006. P. 3, 115 p.

12. Zhurkin I.G., Shaytura S.V. *Geoinformatsionnye sistemy* [Geoinformation systems]. Moscow, KUDIC-PRESS, 2009. 273 p.
13. Pukhov G.E. *Differentsialnye preobrazovaniya funktsy i uravneny* [Differential transformation of functions and equations]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1984. 420 p.
14. Pukhov G.E. *Differentsialnye preobrazovaniya i matematicheskoye modelirovaniye fizicheskikh protsessov* [Differential transformation and mathematical modeling of physical processes]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1986. 158 p.
15. Pukhov G.E. *Priblizhennye metody matematicheskogo modelirovaniya, osnovannye na primenenii differentsialnykh T-preobrazovany* [Approximate methods of mathematical modeling based on tapplication of differential T-transformations]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1988. 216 p.
16. Pukhov G.E. *Differentsialnye spektry i modeli* [Differential spectra and model]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1990. 184 p.
17. Simonyan S.O., Avetisyan A.G. *Prikladnaya teoriya differentsialnykh preobrazovany* [Applied theory of differential transformations]. Yerevan, Chartaraget Publ., 2010. 361 p.
18. Simonyan S.O. Matrichno-vektornye predstavleniya nekotorykh vychislitelnykh metodov opredeleniya parametricheskikh obobshchennykh obratnykh matrits [Matrix-vector representation of some computational methods for determining parametric generalized inverse matrices]. *Izvestiya NAN RA i GIUA. Ser. TN*, 2013, vol. 66, no. 4, pp. 370–378.
19. Simonyan S.O. *Opredeleniye kvadratnykh parametricheskikh obobshchennykh obratnykh matrits Mura–Penrouza primeneniyem differentsialnykh preobrazovaniy Pukhova* [Specifying square parametric generalized inverse matrices of Moore–Penrose using differential transformation of Pukhov]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 6–10.
20. Simonyan S.O. *Parallelnye vychislitelnye metody opredeleniya parametricheskikh obobshchennykh obratnykh matrits* [Parallel computational methods for determining the parametric generalized inverse matrices]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 5, pp. 10–15.
21. Simonyan S.O., Aslanyan G.A. *Metod opredeleniya parametricheskikh B, Q-obobshchenno-obratnykh matrits* [The method of determining parametric B, Q-generalized inverse matrices]. *Izvestiya NAN RA i GIUA. Ser. TN*, 2014, vol. 67, no. 2, pp. 220–226.
22. Metyuz Dzh.G., Fank K.D. *Chislennyye metody. Ispolzovaniye MATLAB* [Numerical methods. Using MATLAB]. Moscow, Williams, 2001. 713 p.
23. Shleye M. Qt 9.8. *Professionalnoye programmirovaniye na C++* [Advanced Programming in C ++]. St. Petersburg, BKhV-Peterburg, 2012. 912 p.
24. Stroustrup B. *The C++ Programming Language. 4th ed.* Boston, Addison – Wesley Professional, 2013. 1368 p.
25. *The Math Works, Inc., MATLAB The language of technical programming Using MATLAB Graphics, Version 7.*

Received: 06 May 2014.