

УДК 681.511.2

## НАИБОЛЬШАЯ СТЕПЕНЬ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЁХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ С РЕГУЛЯТОРОМ ПониЖЕННОГО ПОРЯДКА

Корюкин Анатолий Николаевич,

канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Института математики им. Соболева, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга, 4. E-mail: koryukin@sibmail.ru

Воевода Александр Александрович,

д-р техн. наук, проф. кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета, Россия, 630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20. E-mail: ucit@ucit.ru

Трёхмассовая система определяется шестью параметрами (три массы и три жёсткости), и эти шесть параметров фиксированы.

**Актуальность.** Задача определения наибольшей степени устойчивости является насущной и актуальной темой линейной теории автоматического управления. В данной работе наибольшая степень устойчивости исследуется для класса объектов, наиболее часто рассматриваемых в качестве моделей.

**Цели исследования.** В качестве объекта управления рассматривается произвольная трёхмассовая система, то есть любые массы и жёсткости. Эта трёхмассовая система рассматривается как одноканальная, управляемая регулятором  $3/3$  (числитель передаточной функции которого – полином степени не более чем  $3$ , а знаменатель – полином степени  $3$ ). Управляющая сила приложена к массе, ближайшей к неподвижному основанию; регулируемая величина – отклонение третьей массы. Рассматривается также случай, когда управляющая сила приложена к наиболее удалённой от основания массе, а регулируемая величина – отклонение первой массы. Исследуется наибольшая (максимальная, предельная) степень устойчивости. Работа опирается, прежде всего, на следующее утверждение, доказанное в более раннем и более объёмном исследовании: для любой трёхмассовой системы наибольшую степень устойчивости обеспечивают регуляторы, для которых корни характеристического полинома с наибольшей вещественной частью образуют четырёхкратную комплексную пару.

**Методы.** Для произвольного фиксированного объекта, пробегая регуляторы  $3/3$ , характеристические полиномы образуют некоторый класс полиномов девятой степени со старшим коэффициентом  $1$  с двумя линейными связями. В классе этих полиномов ищется устойчивый полином с наибольшей степенью устойчивости. Затем по этому полиному восстанавливается регулятор, обеспечивающий эту устойчивость.

**Результаты.** Положение девятого корня зависит исключительно от значения одного параметра объекта. Приведена инструкция по вычислению этого параметра объекта, наибольшей степени устойчивости, характеристического полинома и регулятора  $3/3$ , обеспечивающего эту устойчивость. Вычисления проделаны на следующем примере: массы и жёсткости равны единице. Оказалось, что в этом случае девятый корень характеристического полинома не является самым правым.

**Выводы.** Данная работа может служить основой методики вычисления наибольшей степени устойчивости и регуляторов пониженного порядка, обеспечивающих эту устойчивость, и для других управляемых одноканальных систем пониженного порядка.

### Ключевые слова:

Модальный синтез, регуляторы пониженного порядка, устойчивость, трёхмассовая система, наибольшая степень устойчивости, максимальная степень устойчивости, предельная степень устойчивости.

### Введение

Несмотря на почтенный возраст и солидную историю [1–7], линейная теория управления продолжает активно развиваться [8–12].

В линейной теории большое значение имеют регуляторы пониженного порядка – ведь их дешевле и проще изготовлять [9, 10, 13].

Одно из основных и давних направлений линейной теории управления – обеспечение устойчивости для регуляторов пониженного порядка [14–16]. С этим связано понятие «степень устойчивости».

Часто требуется подобрать параметры регулятора так, чтобы колебания затухали наиболее быстро. В линейной теории это можно делать, уменьшая максимум вещественных частей корней характеристического полинома. В этой ситуации чаще всего говорят о максимальной степени устойчивости.

Существуют сотни публикаций о максимальной степени устойчивости. Наиболее цитируемые из них – [15, 16].

Основные работы первого из авторов по поиску максимальной степени устойчивости – [17–19]. В этих работах максимальная степень устойчивости ищется для некоторых классов объектов. Им предшествует работа [20], в которой исследование проводится для конкретных объектов.

Данная работа поясняет и продолжает исследование [17, 18] наибольшей степени устойчивости для произвольной одноканальной трёхмассовой системы без трения в случае, когда управляющая сила действует на первую массу, а наблюдаем за отклонением третьей массы, для регулятора  $3/3$ , обеспечивающего эту устойчивость. Имеется в виду регулятор, у которого числитель и знаменатель передаточной функции есть полиномы степени  $3$ . В данной работе рассмотрим также случай, когда управляющая сила действует на третью массу, а наблюдаем за отклонением первой массы. Из этого изложения понятно, как вычислить наибольшую степень устойчивости и регулятор  $3/3$ , обеспечивающий эту устойчивость.

Изложена также инструкция по вычислению наибольшей степени устойчивости и регулятора 3/3, обеспечивающего эту устойчивость, на конкретном примере.

Данная работа и [17, 18] могут служить образцом и основой методики исследования наибольшей степени устойчивости и регуляторов пониженного порядка, обеспечивающих эту устойчивость.

**Постановка задачи: от объекта до характеристического полинома**

Динамика объекта без трения описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} m_1 s^2 x_1 &= u_1 + w_1 - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 s^2 x_2 &= u_2 + w_2 - k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2), \\ m_3 s^2 x_3 &= u_3 + w_3 - k_3 (x_3 - x_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $s$  – оператор дифференцирования по времени;  $m_i$  ( $i=1,2,3$ ) – массы (номеруем их от неподвижного основания);  $k_i$  – коэффициенты жёсткости пружин;  $x_i$  – отклонения (отсчитываемые от точки покоя);  $u_i$  – управляющие силы;  $w_i = w_i(t)$  – возмущающие силы. Введём параметры объекта

$$\begin{aligned} n_i &= 1 / m_i; \quad p_0 = n_2 k_2, \quad p_1 = n_1 k_1, \\ p_2 &= n_3 k_3, \quad p_3 = n_2 k_3, \quad p_4 = n_1 k_2 \end{aligned}$$

и перепишем уравнения (1):

$$\begin{aligned} (s^2 + n_1 k_1 + n_1 k_2) x_1 - n_1 k_2 x_2 &= n_1 (u_1 + w_1), \\ -n_2 k_2 x_1 + (s^2 + n_2 k_2 + n_2 k_3) x_2 - n_2 k_3 x_3 &= n_2 (u_2 + w_2), \\ -n_3 k_3 x_2 + (s^2 + n_3 k_3) x_3 &= n_3 (u_3 + w_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим параметры объекта

$$p_0 = n_2 k_2, \quad p_1 = n_1 k_1, \quad p_2 = n_3 k_3, \quad p_3 = n_2 k_3, \quad p_4 = n_1 k_2$$

и перепишем уравнения (2):

$$\begin{aligned} (s^2 + p_1 + p_4) x_1 - p_4 x_2 &= n_1 (u_1 + w_1), \\ -p_0 x_1 + (s^2 + p_0 + p_3) x_2 - p_3 x_3 &= n_2 (u_2 + w_2), \\ -p_2 x_2 + (s^2 + p_2) x_3 &= n_3 (u_3 + w_3). \end{aligned}$$

От системы из трёх последних уравнений к (2) можно вернуться по формулам:

$$k_1 = \frac{p_1}{n_1}, \quad k_2 = \frac{p_4}{n_1}, \quad k_3 = \frac{p_3 p_4}{p_0 n_1}, \quad n_2 = \frac{p_0 n_1}{p_4}, \quad n_3 = \frac{p_2 p_0 n_1}{p_3 p_4}. \quad (3)$$

В данной работе рассматриваем случай, когда объект управляется регулятором 3/3: его числитель передаточной функции – полином степени не более чем 3, а знаменатель – полином степени 3. Введём обозначения для коэффициентов числителя и знаменателя:

$$\begin{aligned} N_c(s) &= b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3, \\ D_c(s) &= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользуемся формулами (3) и запишем передаточную функцию объекта через параметры  $p_i$ :

$$\frac{p_2 p_0 n_1}{s^6 + a s^4 + b s^2 + p_0 p_2 p_1},$$

где

$$\begin{aligned} b &= p_0 p_1 + p_0 p_2 + p_2 p_4 + p_3 p_1 + p_3 p_4 + p_2 p_1, \\ a &= p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \end{aligned}$$

– параметры объекта (управляем массой 1 и наблюдаем за массой 3).

*Замечание 1.* Если управляемую и наблюдаемую массы поменять местами, то передаточная функция объекта не изменится.

Выпишем знаменатель и числитель передаточной функции объекта:

$$D_{ob}(s) = s^6 + a s^4 + b s^2 + p_0 p_2 p_1, \quad N_{ob} = p_2 p_0 n_1.$$

Теперь, после перехода к параметрам объекта  $n_i, p_i$ , характеристический полином  $D_{ob}(s)D_c(s) + N_{ob}N_c(s)$  будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} f(s) &= s^9 + c_2 s^8 + (a + c_1) s^7 + \\ &+ (a c_2 + c_0) s^6 + (b + a c_1) s^5 + \\ &+ (b c_2 + a c_0) s^4 + (p_2 p_0 n_1 b_3 + p_0 p_2 p_1 + b c_1) s^3 + \\ &+ (p_2 p_0 n_1 b_2 + p_0 p_2 p_1 c_2 + b c_0) s^2 + \\ &+ (p_0 p_2 p_1 c_1 + p_2 p_0 n_1 b_1) s + p_0 p_2 p_1 c_0 + p_2 p_0 n_1 b_0. \end{aligned}$$

**Связи. Сведение к полиномам со связями**

*Сведение к классу полиномов, заданному двумя параметрами  $a, b$ .* Введём обозначения для коэффициентов характеристического полинома:

$$f(s) = s^9 + K_8 s^8 + \dots + K_1 s + K_0.$$

Приравняем коэффициенты при степенях 8, ..., 0 в обеих записях полинома. Получим 9 равенств. Эти равенства рассмотрим как уравнения, в которых неизвестные – это параметры регулятора. Эти уравнения линейны (относительно параметров регулятора). Исключим из них параметры регулятора (их 7). Получим 7 формул для вычисления параметров регулятора через коэффициенты полинома

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{a K_8 p_0 p_1 p_2 - K_6 p_0 p_1 p_2 + K_0}{n_1 p_0 p_2}, \\ b_1 &= \frac{a p_0 p_1 p_2 - K_7 p_0 p_1 p_2 + K_1}{n_1 p_0 p_2}, \\ b_2 &= \frac{-K_8 p_0 p_1 p_2 + a b K_8 - b K_6 + K_2}{n_1 p_0 p_2}, \quad c_2 = K_8, \\ b_3 &= \frac{-p_0 p_1 p_2 + a b - b K_7 + K_3}{n_1 p_0 p_2}, \\ c_0 &= -a K_8 + K_6, \quad c_1 = -a + K_7, \end{aligned} \quad (5)$$

и две связи коэффициентов:

$$a^2 - b - a K_7 + K_5 = 0, \quad (a^2 - b) K_8 - a K_6 + K_4 = 0.$$

*Сведение к классу полиномов, заданному одним параметром  $t$ .* Корни  $s$  характеристического полинома и параметр объекта  $\sqrt{a}$  имеют одинаковую размерность – обратную времени. Рассмотрим безразмерное  $S = s / \sqrt{a}$ . Тогда  $s = S \sqrt{a}$ . Так как

$$f(s) = s^9 + K_8 s^8 + \dots + K_1 s + K_0,$$

то

$$f(S\sqrt{a}) = (S\sqrt{a})^9 + K_8 (S\sqrt{a})^8 + \dots + K_1 S\sqrt{a} + K_0.$$

Старший коэффициент полинома  $f(S\sqrt{a})$  есть  $a^{9/2}$ . Нормируем полином  $f(S\sqrt{a})$ . Введём обозначения для полученного полинома:

$$F(S) = f(S\sqrt{a}) / a^{9/2} = S^9 + \frac{K_8}{a^{1/2}} S^8 + \dots + \frac{K_1}{a^{8/2}} S + \frac{K_0}{a^{9/2}}.$$

Введём обозначения для его коэффициентов:

$$F(S) = S^9 + C_8 S^8 + \dots + C_1 S + C_0.$$

Из двух последних равенств получим:

$$C_8 = K_8 / a^{1/2}, \dots, C_m = K_m / a^{(9-m)/2}, \dots, C_0 = K_0 / a^{9/2}.$$

Значит,  $K_m = C_m \cdot a^{(9-m)/2}$  при  $m=1, 2, \dots, 8$ . Перепишем теперь связи коэффициентов характеристического полинома:

$$\begin{aligned} a^2 - b - a \cdot a \cdot C_7 + a^2 C_5 &= 0, \\ (a^2 - b) a^{1/2} C_8 - a \cdot a^{3/2} C_6 + a^{5/2} C_4 &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\frac{a^2 - b}{a^2} C_7 + C_5 = 0, \quad \frac{a^2 - b}{a^2} C_8 - C_6 + C_4 = 0.$$

Таким образом, коэффициенты полинома  $F(S)$  удовлетворяют двум связям

$$T - C_7 + C_5 = 0, \quad T C_8 - C_6 + C_4 = 0, \quad (6)$$

где  $T=1-t$ ,  $t=b/a^2$ .

Итак [17. С. 9], при фиксированных параметрах объекта и при произвольных параметрах регулятора множество полиномов  $F(S)$  – это множество полиномов  $F(S) = S^9 + C_8 S^8 + \dots + C_1 S + C_0$ , удовлетворяющих обоим связям (6).

К коэффициентам  $K_i$  можно вернуться по формулам:  $K_i = C_i / a^{(9-i)/2}$ .

Оказалось, что для трёхмассовых систем значения параметра  $t$  лежат в точности в интервале  $0 < t < 1/3$  [17. С. 16]. Значит,  $2/3 < T < 1$ .

Теперь задача наибольшей устойчивости трёхмассовой системы сведена к поиску наиболее устойчивых полиномов со связями (6).

#### Четырёхкратная комплексная пара на правой вертикали

Правой вертикалью любого полинома назовём вертикаль комплексной плоскости, на которой есть корни этого полинома, а правее этой вертикали корней нет. Одним из основных результатов исследований [17, 18] является следующее утверждение.

**Теорема 1.** [18. С. 48–49. Теорема 9]. Среди всех полиномов девятой степени со старшим коэффициентом единица и со связями коэффициентов (6), наибольшей степенью устойчивости обладают полиномы с четырёхкратной комплексной парой на правой вертикали.

Утверждение этой теоремы самое объёмное: это параграфы 5–7 в [17] и §§ 12–14, 18 в [18]. За недо-

статком места раскроем только другую часть исследования: поиск наиболее устойчивых полиномов в классе полиномов со связями (6) и с четырёхкратной комплексной парой на правой вертикали.

Рассмотрим полином  $F(S) = S^9 + C_8 S^8 + \dots + C_1 S + C_0$  со связями (6), на правой вертикали которого находится четырёхкратная комплексная пара. Обозначим её  $x \pm yI$ . Считаем, что  $x < 0$ . Пусть  $z$  – оставшейся корень;  $q = x^2 + y^2$ . Полином  $F(S)$  можно записать в виде  $(S-z)(S^2-2xS+q)^4$ . Выпишем для него обе связи (6) и сгруппируем в них слагаемые по  $z$ :

$$\begin{aligned} -t + (-8x + 32x^3 + 24xq)z + 1 + 48x^2q - \\ -24x^2 - 4q + 16x^4 + 6q^2 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (t + 24x^2 - 1 - 6q^2 + 4q - 16x^4 - 48x^2q)z + \\ + 8tx - 32x^3q + 24xq + 32x^3 - 8x - 24xq^2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Разложим на множители коэффициент при  $z$  в левой части первой связи:  $8x(4x^2-1+3q)$ . Так как  $x < 0$ , то  $x \neq 0$ . В [18. § 11. С. 32, 33] показано, что тогда  $4x^2-1+3q \neq 0$ . Теперь можно выразить  $z$  из связи (7):

$$z = -\frac{1}{8} \frac{16x^4 + 48qx^2 + 6q^2 - 24x^2 - 4q - t + 1}{x(4x^2 + 3q - 1)}. \quad (9)$$

Рассмотрим связи (7), (8) как систему уравнений, линейных относительно  $z$ . Выпишем определитель матрицы этой системы:

$$\begin{aligned} t^2 + (224x^4 + 96qx^2 - 12q^2 - 16x^2 + 8q - 2)t + \\ + 256x^8 + 512qx^6 + 960q^2x^4 + 256x^6 - \\ - 640qx^4 + 36q^4 + 96q^2x^2 + 96x^4 - 48q^3 - \\ - 96qx^2 + 28q^2 + 16x^2 - 8q + 1 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При  $x \neq 0$  система уравнений (9), (8) равносильна уравнениям (7), (10).

Полином в левой части равенства (10) зависит только от чётных степеней  $x$ . Введём  $X = x^2$  и подставим в (10)  $x = -\sqrt{X}$ . Получим:

$$\begin{aligned} t^2 + (224X^2 + 96Xq - 12q^2 - 16X + 8q - 2)t + \\ + 256X^4 + 512qX^3 + 960q^2X^2 + 36q^4 + \\ + 256X^3 - 640qX^2 + 96q^2X - 48q^3 + 96X^2 - \\ - 96qX + 28q^2 + 16X - 8q + 1 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Полином в левой части последнего равенства второй степени по переменной  $X$ . Соберём полный квадрат:

$$\begin{aligned} (112X^2 + 48Xq - 6q^2 - 8X + 4q + t - 1)^2 = \\ = 64X(4X - 1 + 3q)(48X^2 + 4Xq - 3q^2 + 4X + q). \end{aligned} \quad (12)$$

Слагаемые вне полного квадрата образуют полином, разложимый на множители. Введём обозначения:  $p_1 = 4X - 1 + 3q$ ,  $g_1 = 48X^2 + 4Xq - 3q^2 + 4X + q$ . Левая часть равенства (12) неотрицательная. Значит, для точек кривой (11) при  $X > 0$  выполнено неравенство  $p_1 g_1 \geq 0$ . На плоскости  $(X, q)$   $h_1 = 0$  – прямая и  $g_1 = 0$  – гипербола. Нарисуем их.

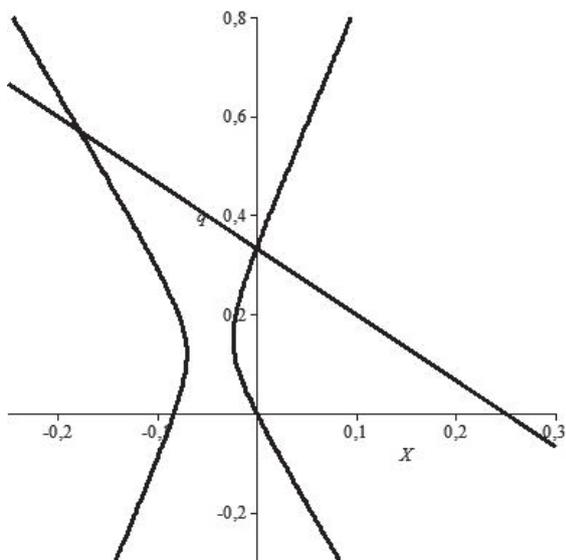


Рис. 1. Прямая  $4X+3q-1=0$  и гипербола  $48X^2+4Xq-3q^2+4X+q=0$

Fig. 1. Straight line  $4X+3q-1=0$  and hyperbolic line  $48X^2+4Xq-3q^2+4X+q=0$

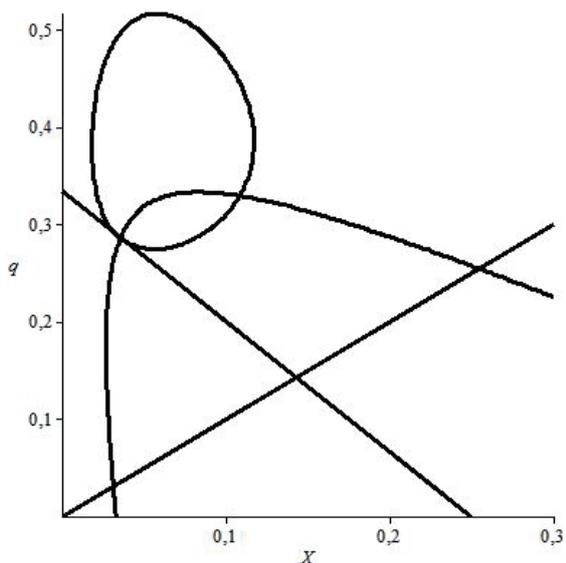


Рис. 2.  $t=0$ . Овал

Fig. 2.  $t=0$ . Oval

На рис. 1 выше прямой выполнено неравенство  $p_1 > 0$ , ниже  $-p_1 < 0$ . В полуплоскости  $X > 0$  в области правее обеих ветвей гиперболы выполнено неравенство  $g_1 > 0$ ; выше и ниже – неравенство  $g_1 < 0$ . При  $X > 0, q > 0$  от гиперболы остаётся только верхняя часть правой ветви (выше прямой).

Теперь понятно, что при  $X > 0, q > 0$  неравенство  $p_1 g_1 \geq 0$  выполнено только в первой четверти плоскости, выше прямой и правее гиперболы, то есть

$$4X + 3q - 1 > 0, 48X^2 + 4Xq - 3q^2 + 4X + q \geq 0. \quad (13)$$

Вспомним, что  $z \leq x$  (девятый корень на правой вертикали или левее). В неравенстве  $z - x \leq 0$  заменим  $z$  по формуле (9). Воспользуемся неравенством  $x < 0$  и первым из неравенств (13), и в полученном неравенстве избавимся от знаменателя. Получим

$$48x^4 + 72qx^2 + 6q^2 - 32x^2 - 4q - t + 1 \leq 0,$$

или

$$48X^2 + 72Xq + 6q^2 - 32X - 4q - t + 1 \leq 0. \quad (14)$$

Введём обозначения:  $g_2$  – полином из левой части неравенства (14);  $O$  – полином из левой части равенства (11). При любом фиксированном  $t$  на плоскости  $(X, q)$  кривая  $g_2=0$  – гипербола.

Факт 1. В [17. С. 35–38] показано, что при фиксированном  $0 \leq t < 1/3$  в секторе  $q > X > 0$  плоскости  $(X, q)$  кривая  $O(X, q)=0$  ограничена с двух сторон двумя касающимися её вертикалями; на любой вертикали между этими двумя есть ровно две точки кривой.

На рис. 2 на плоскости  $(X, q)$  при  $t=0$  изображены: прямые  $q=X, 4X+3q-1=0$ ; гипербола  $g_2=0$ ; кривая  $O(X, q)=0$  (яйцевидный овал). Факт 1 гарантирует, что в секторе  $q > X > 0$  других точек кривой  $O(X, q)=0$ , кроме овала, нет.

Точки, для которых в первой четверти выполнено неравенство (14) – это точки ниже гиперболы  $g_2=0$ . Итак, нас интересуют точки овала в первой четверти плоскости  $(X, q)$ , выше обеих прямых  $q=X, 4X+3q-1=0$  и ниже гиперболы  $g_2=0$ . При восстановлении исходной ситуации точки гиперболы станут полиномами, у которых все корни будут на правой вертикали (причём 8 из них будут образовывать четырёхкратную комплексную пару). В верхней части овала (выше параболы) девятый корень будет находиться левее четырёхкратной комплексной пары. Из формулы (9) следует, что на овале при приближении к прямой  $4X+3q-1=0$  девятый корень будет устремляться к минус бесконечности.

Нарисуем теперь (рис. 3) прямую  $4X+3q-1=0$ , гиперболу  $g_2=0$  и кривую  $O(X, q)=0$  при достаточно большом  $t < 1/3$ , например при  $t=0,24$ .

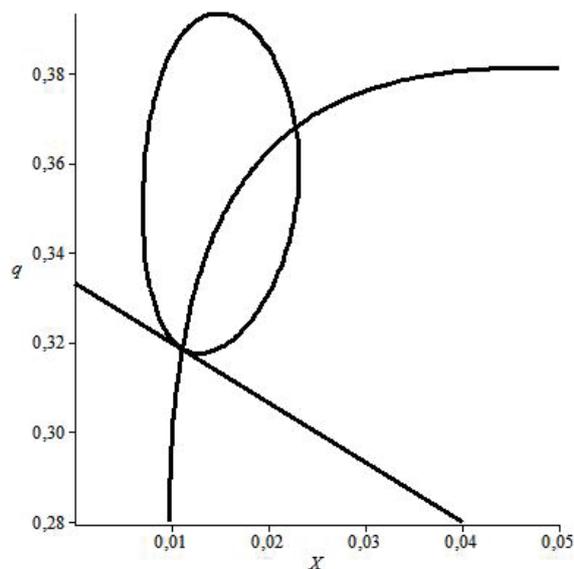


Рис. 3. Прямая  $4X+3q-1=0$ , гипербола  $g_2=0$  и кривая  $O(X, q)=0$  при  $t=0,24$

Fig. 3. Straight line  $4X+3q-1=0$ , hyperbolic line  $g_2=0$  and a curve  $O(X, q)=0$  at  $t=0,24$

Вспомним, что нас интересует наибольшая устойчивость, а это самая правая точка овала (на двух последних графиках). Видим, что при  $t=0$  (рис. 2) это правая точка пересечения гиперболы и овала, то есть в этой точке все 9 корней будут на одной вертикали. На последнем же графике (при  $t=0,24$ ) наибольшую устойчивость обеспечивает самая правая точка овала.

Из соображений непрерывности понятно, что при изменении параметра  $t$  от нуля до  $t < 1/3$  будет хотя бы одно значение этого параметра, при котором гипербола проходит через самую правую точку овала. Для [17. С. 39] эти значения параметра  $t$  вычислены. Оказалось, что оно единственно и  $t_0 \approx 0,201$ .

**Теорема 2.** [18. С. 48–49. Теорема 9]. В классе полиномов со связями (6) с четырёхкратной комплексной парой на правой вертикали [17. § 11] имеем:

- При  $t \leq t_0 \approx 0,201$  наиболее устойчив полином, параметры  $X, q$  которого вычисляются как одно из двух совместных решений уравнений (11),

$$48X^2 + 72Xq + 6q^2 - 32X - 4q - t + 1 = 0 \quad (15)$$

с большим  $X$ . Это правая точка пересечения овала и гиперболы (15). В этом случае все корни лежат на одной вертикали.

- При  $t \leq t_0 \approx 0,201$  наиболее устойчив полином, параметры  $X, q$  которого вычисляются как одно из двух совместных решений уравнений (11),

$$18q^3 - 18q^2 + (240X^2 + 24X - 3t + 7)q + 64X^3 - 80X^2 + 12Xt - 12X + t - 1 = 0 \quad (16)$$

с большим  $X$  (в левой части последнего равенства одна восьмая частной производной полинома  $O$  по переменной  $q$ ). Это правая точка пересечения овала и гиперболы (15). В этом случае девятый корень лежит строго левее правой вертикали.

#### Методика исследования одноканальной трёхмассовой системы

В данной работе и в [17, 18] виден следующий путь исследования одноканальных трёхмассовых систем, управляемых регулятором, числитель и знаменатель передаточной функции которого – полиномы степени 3:

1. Выписать передаточную функцию объекта, регулятора и характеристический полином.
2. Характеристические полиномы образуют некоторое множество полиномов с линейными связями. Выписать связи.
3. За счёт подбора единицы измерения корней упростить связи.
4. Так же как в [17, 18], ищем наибольшее число  $m$  корней на правой вертикали такое, что для произвольного полинома со связями найдётся непрерывное преобразование полиномов со связями, сдвигающие правую вертикаль влево и заканчивающиеся тем, что на правой вертикали окажется ещё один корень. Для этого для

$k=1,2,\dots$ , начиная с  $k=1$ , ищем непрерывное преобразование полиномов со связями, сдвигающие правую вертикаль влево и оканчивающиеся тем, что на правой вертикали окажется ещё один корень. В данном исследовании для любого полинома со связями оказалось возможным непрерывно сдвинуть правую вертикаль влево так, что на ней оказывается  $m=8$  корней из девяти [17. §§ 5–7], [18. §§ 13, 18].

5. Так же, как в [17, 18], искать непрерывные преобразования полиномов со связями, сдвигающие правую вертикаль влево и оканчивающиеся тем, что два корня на правой вертикали совпадут. В данном исследовании для любого полинома со связями оказалось возможным непрерывно сдвигать правую вертикаль с восьмью корнями влево так, что в конце этого преобразования эти корни на правой вертикали образуют четырёхкратную комплексную пару.
6. В полученном множестве полиномов найти полином с наибольшей степенью устойчивости.

#### Пример вычислений

В данном исследовании хорошо просматривается следующая последовательность вычислений.

1. Рассмотрим объект, у которого все массы и жёсткости равны единице:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1, \quad k_1 = k_2 = k_3 = 1.$$

2. Вычислим для него параметры. Обратные массы:

$$n_i = 1/m_i = 1; \quad p_0 = n_2 k_2 = 1, \quad p_1 = n_1 k_1 = 1,$$

$$p_2 = n_3 k_3 = 1, \quad p_3 = n_2 k_3 = 1, \quad p_4 = n_1 k_2 = 1;$$

$$a = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 5,$$

$$b = p_0 p_1 + p_0 p_2 + p_2 p_4 + p_3 p_1 + p_3 p_4 + p_2 p_1 = 6;$$

$$t = b/a^2 = 6/5^2 = 6/25 = 0,24.$$

3. Видим, что  $t=0,24 > t_0 \approx 0,201$ . Значит, согласно последней теореме, наилучшая устойчивость должна достигаться, когда девятый корень строго левее правой вертикали. Это подтверждает последний график (для  $t=6/25=0,24$ ).
4. Вычисление управления, соответствующего правой точке овала.

4.1. Выпишем остаток при делении полинома  $O(q)$  (11) на полином  $O_q(q)$  (16) (одна восьмая частной производной полинома  $O(q)$  по переменной  $q$ ):

$$r_1(q) = (480X^2 + 48X - 6t + 2)q^2 + (-4/3 - 56X + 72Xt + 4t + 384X^3 - 320X^2)q + 256X^4 + t^2 + 8X + (896/3)X^3 - (4/3)t + 224X^2t + 1/3 - 8Xt + (128/3)X^2.$$

4.2. Выпишем остаток  $e(q)$  при делении полинома  $O_q(q)$  на полином  $r_1(q)$  по переменной  $q$ :

$$e(q) = \frac{48X}{(240X^2 + 24X - 3t + 1)^2} e_2(q),$$

где

$$e_2(q) = \left( \begin{array}{l} 290304X^5 + 66048X^4 + \\ +(-15552t + 9024)X^3 + \\ +(-3648t + 1216)X^2 + \\ +(702t^2 - 612t + 126)X + 18t^2 - 12t + 2 \end{array} \right) q + \\ +86016X^6 - 66048X^5 + (22272t - 26368)X^4 + \\ +(11328t - 5056)X^3 + (1200t^2 + 992t - 464)X^2 + \\ +(-162t^2 + 156t - 34)X + 9t^3 - 15t^2 + 7t - 1.$$

4.3. Заметим, что при  $X > 0$ ,  $t < 1/3$  знаменатель дроби  $e(q)$  положителен. Поэтому уравнение  $e(q) = 0$  равносильно уравнению  $e_2(q) = 0$ .

4.4. Выпишем полином  $e_1(q)$  при  $t = 6/25$ :

$$\left( \begin{array}{l} 2,9031^5 X^5 + 66050 X^4 + 5292 X^3 + \\ +340,5 X^2 + 19,56 X + 0,1568 \end{array} \right) q + \\ +8602 X^6 - 66050 X^5 - 21020 X^4 - 2337 X^3 - \\ -156,8 X^2 - 5,891 X - 0,05958 = 0.$$

4.5. Заметим, что последний полином степени 1 по  $q$ , причём коэффициент при  $q$  положителен. Приравняем последний полином к нулю и выразим  $q$  через  $X$ :

$$q = -0,02 \frac{\left( \begin{array}{l} 1,3441^9 X^6 - 1,0321^9 X^5 - \\ -3,2851^8 X^4 - 3,6521^7 X^3 - \\ -2,451^6 X^2 - 92050,0 X - 931,0 \end{array} \right)}{\left( \begin{array}{l} 9,0721^7 X^5 + 2,0641^7 X^4 + \\ +1,6541^6 X^3 + 1,0641^5 X^2 + \\ +6111 X + 49 \end{array} \right)} \quad (17)$$

4.6. С помощью последнего равенства в уравнении  $r_1(q) = 0$  выразим  $q$  через  $X$  (специализируем также  $t = 6/25$ ). Избавимся от ненулевого знаменателя. Получим

$$3,951 \cdot 10^{15} \cdot X^{10} + 1,016 \cdot 10^{16} \cdot X^9 + 3,461 \cdot 10^{15} \cdot X^8 + \\ +4,607 \cdot 10^{14} \cdot X^7 + 3,526 \cdot 10^{13} \cdot X^6 + \\ +2,747 \cdot 10^{12} \cdot X^5 + 1,690 \cdot 10^{11} \cdot X^4 + 3,63 \cdot 10^9 \cdot X^3 - \\ -2,168 \cdot 10^7 \cdot X^2 - 6,62 \cdot 10^6 X + 45620 = 0.$$

4.7. Найдём вещественные корни полинома из левой части:  $-2,1959, -0,1388, 0,007, 0,232$ .

4.8. Возьмём наибольший корень:  $X = 0,0232$ .

4.9. Вычислим параметр  $q$  по формуле (17):  $q = 0,359$ .

4.10. Убеждаемся, что  $q = 0,359 > X = 0,0232$ .

4.11. Вычислим  $y = \sqrt{q - X} = 0,5796$ .

4.12. Вычислим  $x$  по формуле  $x = -\sqrt{X}$ :  $x = -0,1522$ .

4.13. По формуле (9) вычислим параметр  $z$ :  $z = -0,2453$ .

4.14. По формуле  $F(S) = (S - z)(S^2 - 2xS + q)^4$  вычислим полином  $F(S)$ :

$$F(S) = S^9 + 1,463 S^8 + 2,291 S^7 + 1,913 S^6 + \\ +1,531 S^5 + 0,801 S^4 + 0,382 S^3 + \\ +0,119 S^2 + 0,03 S + 0,004.$$

4.15. Масштаб корней характеристического полинома:  $\sqrt{a} = \sqrt{5} \approx 2,236$ .

4.16. Исходная корневая переменная:  $s = S \cdot \sqrt{a} = S \cdot \sqrt{5} \approx 2,236 S$ .

4.17. Вычислим корни исходного характеристического полинома. Вещественная часть комплексного корня (правая вертикаль, наибольшая степень устойчивости):  $x \cdot \sqrt{a} = -0,34$ ; мнимая составляющая комплексного корня:  $y \cdot \sqrt{a} = 1,3296$ ; девятый корень:  $z \cdot \sqrt{a} = -0,548$ .

4.18. Девятый корень лежит строго левее правой вертикали:  $-0,548 < -0,34$ .

4.19. Вычислим характеристический полином по формуле  $f(s) = F(s/\sqrt{a}) a^{9/2}$ :

$$f(s) = s^9 + 3,271 s^8 + 11,45 s^7 + 21,38 s^6 + 38,26 s^5 + \\ + 44,79 s^4 + 47,78 s^3 + 33,36 s^2 + 19,03 s + 5,7.$$

4.20. Вычислим параметры регулятора по формулам (5):

$$b_0 = 0,667, \quad b_1 = 12,58, \quad b_2 = -0,1002, \quad b_3 = 8,067, \\ c_0 = 5,031, \quad c_1 = 6,453, \quad c_2 = 3,271.$$

4.21. Выпишем регулятор по формулам (4):

$$\frac{8,067 s^3 - 0,1002 s^2 + 12,58 s + 0,667}{s^3 + 3,271 s^2 + 6,453 s + 5,031}.$$

### Заключение

Была исследована наибольшая степень устойчивости произвольной одноканальной трёхмассовой системы, управляемой регулятором 3/3 (числитель и знаменатель его передаточной функции – полиномы степени 3), в случае, когда управляющая сила действует на массу, ближайшую к основанию, а в качестве регулируемой величины выбираем отклонение второй массы. Замечено, что если поменять местами управляемую и наблюдаемую массы, то максимальная степень устойчивости и обеспечивающий её регулятор не изменятся. Приведён пример вычисления максимальной степени устойчивости и обеспечивающего её регулятора 3/3. Данная работа и [17, 18] могут служить основой методики исследования наибольшей степени устойчивости и вычисления регулятора пониженного порядка, обеспечивающего эту устойчивость, и для других классов управляемых одноканальных систем пониженного порядка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. – М.: Наука, 1986. – 616 с.
2. Chi-Tsong Chen. Linear system theory and design. – New York; Oxford: Oxford University Press, 1999. – 176 p.
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
4. Antsaklis P.J., Michel A.N. Linear Systems. – Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 2006. – 670 p.
5. Qing-Guo Wang. Decoupling Control. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. – 356 p.
6. Mathukumalli Vidyasagar. Control System Synthesis: a Factorization Approach. P. I // Synthesis Lectures on Control and Mechatronics. – June 2011. – V. 2. – № 1. – P. 1–184. DOI: 10.2200/S00351ED1V01Y201105CRM002.
7. Mathukumalli Vidyasagar. Control System Synthesis: a Factorization Approach. P. II // Synthesis Lectures on Control and Mechatronics. – June 2011. – V. 2. – № 1. – P. 1–227. DOI: 10.2200/S00358ED1V01Y201105CRM003.
8. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 560 с.
9. Честнов В.Н., Зацепилова Ж.В. Понижение порядка SISO-регуляторов на основе критерия Найквиста // XII Всеросс. совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – М., 16–19 июня 2014. – С. 241–247.
10. Федюков А.А. Стабилизация систем с фазовыми ограничениями с помощью динамических регуляторов пониженного порядка // XII Всеросс. совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – М., 16–19 июня 2014. – С. 338–344.
11. Федюков А.А. Стабилизация по измеряемому выходу двухзвенного перевернутого маятника // Вестник ННГУ. – 2012. – № 2. – С. 177–183.
12. Честнов В.Н., Самшорин Н.И. Синтез робастных регуляторов при параметрической неопределенности и внешних возмущениях // XII Всеросс. совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. – М., 16–19 июня 2014. – С. 1033–1045.
13. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры / В.А. Бойченко, А.П. Курдюков, В.Н. Тимин, Чайковский М.М, И.Б. Ядыкин // Управление большими системами: сборник трудов. – 2007. – Т. 19. – С. 23–126.
14. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию и по критерию максимальной робастности // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 3. – С. 119–130.
15. Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД управлении. Ч. 1 / А.М. Шубладзе, В.Е. Попадьюк, А.А., Якушева С.И. Кузнецов // Управление большими системами: сборник трудов. – 2008. – № 22. – С. 86–100.
16. Шубладзе А.М. Достаточные условия оптимальности структур в системах максимальной степени устойчивости произвольного вида // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 4. – С. 43–57.
17. Корюкин А.Н. Наибольший запас устойчивости трёхмассовой системы с регулятором третьего порядка. Ч. 1 // Сборник научных трудов ННГУ. – 2013. – № 3 (73). – С. 4–40.
18. Корюкин А.Н. Наибольший запас устойчивости трёхмассовой системы с регулятором третьего порядка. Ч. 2 // Сборник научных трудов ННГУ. – 2013. – № 4 (74). – С. 13–50.
19. Корюкин А.Н. Предел устойчивости по Гурвицу двухмассовой системы с ПИД-регулятором. Ч. 2 // Сборник научных трудов ННГУ. – 2012. – № 4 (70). – С. 13–44.
20. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. Reducing the Stabilizing Control Order for a Double Inverted Pendulum // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2012. – V. 48. – № 6. – P. 593–604.

Поступила 20.06.2014 г.

UDC 681.511.2

## MAXIMUM STABILITY DEGREE OF A THREE-MASS SYSTEM WITH A LOWER-ORDER CONTROLLER

Anatoly N. Koryukin,

Cand. Sc., Sobolev's Institute of Mathematics, 4, Koptuyug's Avenue,  
Novosibirsk, 630090, Russia. E-mail: koryukin@sibmail.ru

Alexander A. Voevoda,

Dr. Sc., Novosibirsk State Technical University, 20, Karl Marx Avenue,  
Novosibirsk, 630073, Russia. E-mail: icit@icit.ru

*A three-mass system is defined by six parameters (three weights and three rigidity), and these six parameters are fixed.*

**Relevance.** *The problem of defining the maximum stability degree is an essential and urgent topic of the linear theory of automatic control. The paper considers the maximum stability degree for a class of objects which are considered most often as models.*

**Research objectives.** *Any three-mass system, that is any masses and rigidity, is considered as a control object. This three-mass system is considered as a single-channel, operated by a regulator 3/3 (polynomial of a degree no more than 3 is the numerator of a transfer function, and a denominator is a polynomial of degree 3). Steering force is applied to the weight closest to the motionless basis; adjustable size is a deviation of the third weight. The paper considers as well the case when the steering force is applied to the weight most remote from the basis, and the adjustable size is a deviation of the first weight. The maximum (limiting) stability degree is investigated. The paper is guided first of all by the following statement proved in earlier and more volume research: for any three mass systems the maximum stability degree is provided by controllers for which the roots of a characteristic polynomial with the greatest material part form quadruple complex pair.*

**Methods.** *For any fixed object, running controllers 3/3, the characteristic polynomials form some class of polynomials of the ninth degree with the senior factor 1 with two linear communications. In the class of these polynomials the steady polynomial with the maximum stability degree is sought. Then the controller providing this stability is restored by this polynomial.*

**Results.** The position of the ninth root depends only on the value of one object parameter. The paper introduces the instruction on calculation of this parameter, the maximum stability degree, a characteristic polynomial and a controller 3/3 providing this stability. The calculations were carried out on the following example: weights and rigidity are equal to a unit. It turned out that in this case the ninth root of a characteristic polynomial is not the most right.

**Conclusions.** The paper can form a basis of a technique of calculating the maximum stability degree and lower-order controllers providing this stability, and for other operated single-channel lower-order systems.

**Key words:**

Modal synthesis, lower-order controllers, stability, three-mass system, optimal stability degree, maximum stability degree, limit stability degree.

**REFERENCES**

1. Pervozvansky A.A. *Kurs teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Course of the theory of automatic control]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 616 p.
2. Chi-Tsong Chen. *Linear system theory and design*. New York; Oxford, Oxford University Press, 1999. 176 p.
3. Polyak B.T., Shcherbakov P.C. *Robastnaya ustoychivost i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow, Nauka Publ., 2002. 303 p.
4. Antsaklis P.J., Michel A.N. *Linear Systems*. Boston; Basel; Berlin, Birkhauser, 2006. 670 p.
5. Qing-Guo Wang. *Decoupling Control*. Berlin; Heidelberg, Springer-Verlag, 2003. 356 p.
6. Mathukumalli Vidyasagar. *Control System Synthesis: a Factorization Approach*. P. I. Synthesis Lectures on Control and Mechatronics. June 2011, vol. 2, no. 1, pp. 1–184. DOI: 10.2200/S00351ED1V01Y201105CRM002.
7. Mathukumalli Vidyasagar. *Control System Synthesis: a Factorization Approach*. P. II. Synthesis Lectures on Control and Mechatronics, June 2011, vol. 2, no. 1, pp. 1–227. DOI: 10.2200/S00358ED1V01Y201105CRM003.
8. Polyak B.T., Khlebnikov M.B., Shcherbakov P.C. *Upravlenie lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: Tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv* [Management of linear systems at external indignations: the technique of linear matrix inequalities]. Moscow, LENAND Publ., 2014. 560 p.
9. Chestnov V.N., Zatsepilova Zh.V. Ponizhenie poryadka SISO-regulyatorov na osnove kriteriya Naykvista [Fall of SISO-controller order based on Naykvist criterion]. *XII Vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2014* [XII All-Russia meeting on management problems RMMP-2014]. Moscow, 16–19 June 2014. pp. 241–247.
10. Fedyukov A.A. Stabilizatsiya sistem s fazovymi ogranicheniyami s pomoshchyu dinamicheskikh regulyatorov ponizhennogo poryadka [Stabilization of systems with phase restrictions by means of low-order dynamic controllers]. *XII Vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2014* [XII All-Russia meeting on management problems RMMP-2014]. Moscow, 16–19 June 2014. pp. 338–344.
11. Fedyukov A.A. Stabilizatsiya po izmeryaemomu vykhodu dvukhzvennogo perevernutogo mayatnika [Stabilization on a measured exit of two-level overturned pendulum]. *Vestnik UNN*, 2012, no. 2, pp. 177–183.
12. Chestnov V.N., Samshrin N.I. Sintez robastnykh regulyatorov pri parametricheskoy neopredelennosti i vneshnikh vozmushcheniyakh [Synthesis of robust controllers at parametrical uncertainty and external indignations]. *XII Vserossiyskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2014* [XII All-Russia meeting on management problems RMMP-2014]. Moscow, 16–19 June 2014. pp. 1033–1045.
13. Boychenko V.A., Kurdyumov A.P., Timin V.N., Yadykin I.B. Nekotorye metody sinteza regulyatorov ponizhennogo poryadka i zadannoy strukturny [Some methods of synthesizing low-order controllers of the set structure]. *Upravlenie bolshimi sistemami: sbornik trudov* [Large-scale Systems Control], 2007, vol. 19, pp. 23–126.
14. Kiselev O.N., Polyak B.T. Sintez regulyatorov nizkogo poryadka po kriteriyu i po kriteriyu maksimalnoy robastnosti [Synthesis of low-order controllers by criterion and by maximum robustness criterion]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1999, № 3, pp. 119–130.
15. Shubladze A.M., Popadko V.E., Yakusheva A.A., Kuznetsov S.I. Issledovanie optimalnykh po stepeni ustoychivosti resheniy pri PID upravlenii. Chast 1 [Research of optimum decisions on stability degree at PID control. P. 1]. *Upravlenie bolshimi sistemami – Large-scale Systems Control*. 2008, no. 22, pp. 86–100.
16. Shubladze A.M. Dostatochnye usloviya optimalnosti struktur v sistemakh maksimalnoy stepeni ustoychivosti proizvolnogo vida [Sufficient conditions of structure optimality in the systems with maximum stability degree]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1999, no. 4, pp. 43–57.
17. Koryukin A.N. Naibolshy zapas ustoychivosti trekhmassovoy sistemy s regulyatorom tretego poryadka. Chast 1 [The greatest stock of stability of three-mass system with a regulator of the third order. P. 1]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU*, 2013, no. 3 (73), pp. 4–40.
18. Koryukin A.N. Naibolshy zapas ustoychivosti trekhmassovoy sistemy s regulyatorom tretego poryadka. Chast 2 [The greatest stock of stability of three-mass system with a regulator of the third order. P. 2]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU*, 2013, no. 4 (74), pp. 13–50.
19. Koryukin A.N. Predel ustoychivosti po Gurvitsu dvukhmassovoy sistemy s PID-regulyatorom. Chast 2 [Stability limit according to Gurvits of two-mass system with a PID-control. P. 2]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU*, 2012, no. 4 (70), pp. 13–44.
20. Voevoda A.A., Koryukin A.N., Chekhonadskikh A.V. Reducing the Stabilizing Control Order for a Double Inverted Pendulum. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2012, vol. 48, no. 6, pp. 593–604.

Received: 20 June 2014.