

УДК 517.9:681.5

СИНХРОНИЗАЦИЯ НЕИДЕНТИЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ РОБАСТНОГО ЭКВИВАЛЕНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рустамов Газанфар Арастун оглы,

д-р техн. наук, проф. кафедры «Автоматика и управление» Азербайджанского Технического Университета, Азербайджан, Az1073, Баку, пр. Г. Джа-вида, 25. E-mail: gazanfar.rustamov@gmail.com

Актуальность работы обусловлена необходимостью повышения эффективности подходов к синхронизации неидентичных взаимосвязанных динамических систем в условиях существенной неопределенности.

Цель работы: построение следящей робастной системы для ведомых систем, эталонной траекторией (задание) для которых является синхронизирующий выходной сигнал ведущей системы; оценка выполнения заданных динамических и статических показателей, таких как время установления переходной составляющей и допустимая ошибка синхронизации; исследование робастных свойств при отклонении параметров ведомых систем от номинальных на $\pm 50\%$.

Методы исследования. В работе использован метод функции Ляпунова, теория автоматического управления, элементы теории синхронизации и хаоса; моделирование на Matlab/Simulink. Главной особенностью метода является использование нового типа управления – «робастное эквивалентное управление» – для построения робастных систем управления и развязки взаимосвязанных ведомых систем без использования компенсаторов перекрестных каналов. Робастный регулятор является PD^{n-1} -контроллером с настраиваемым коэффициентом усиления. Возможность беспредельного увеличения коэффициента усиления без потери устойчивости позволяет подавлять генеральные составляющие неопределенных моделей ведомых систем до сколь угодно малой величины. Этим обеспечивается высокая точность слежения (синхронизации) эталонной траектории для широкого класса неопределенностей.

Результаты и выводы. Численное моделирование систем синхронизации с различными вынужденными регулярными и хаотическими осцилляторами показало простоту и высокую эффективность предложенного подхода. В принципе, ошибку синхронизации можно уменьшить до сколь угодно малой величины. Однако это требует использования больших значений коэффициента усиления регулятора. Достигнуты высокие робастные показатели динамического режима. Подтверждением этого является высокая концентрация пучков переходных характеристик ведомых систем в окрестности номинальной траектории. Удалось обойти математические сложности, возникающие при синтезе следящих робастных систем. К недостаткам методики следует отнести усиление высокочастотных помех, имеющих непосредственный доступ в регулятор, а также использование производных выхода для формирования PD^{n-1} -регулятора. Кроме того, не всякий объект допускает реализацию высокого коэффициента усиления.

Ключевые слова:

Синхронизация, следящая робастная система, функция Ляпунова, большой коэффициент усиления, робастное эквивалентное управление, кодирование, хаос Лоренса и Дuffинга.

Введение

Синхронизация является одной из диалектических основ возникновения многих групповых природных явлений, а также широко используется в технике и технологии. Например, при передаче и защите информации, в физике, химии, биомедицине, вибрационных и нано-технологиях.

Следуя [1], основные принципы управления синхронизацией можно разбить на три группы:

1. Вынужденная синхронизация с использованием внешнего периодического сигнала – разомкнутое (программное) управление [2, 3].
2. Синхронизация с помощью обратной связи [4, 5].
3. Комбинированный метод [6, 7].
4. Адаптивное и робастное управление [8–11].

Недостатки разомкнутого управления хорошо известны из общей теории автоматического управления.

Хотя 2-й метод синхронизации часто приводит к относительно сложным нелинейным регуляторам, он часто используется для синхронизации двух хаотических систем [12, 13].

В комбинированном подходе программное составляющее управления используется для придания обычной колебательной системе свойство вынужденного осциллятора, а обратная связь – для

коррекции собственной динамики. Метод предназначен для уменьшения ошибки синхронизации. В [6, 7] обсуждаются вопросы синхронизации хаотических осцилляторов Дuffинга–Ван дер Поля с одной и двумя потенциальными ямами. Здесь комбинированное управление содержит внешние гармонические возбуждения, которые не удобны на практике.

Адаптивное и робастное управление, как и в общей теории управления, используется в условиях неопределенности, когда используемые при синтезе модели ведомых подсистем являются неполными.

Хаотическая синхронизация тщательно изучена в работах Л.М. Пекора и Т.Л. Карролл [14].

В [15, 16] предложен метод для синхронизации неустойчивых периодических орбит хаотических систем.

В [17], используя результаты [15, 16], предложен метод синхронизации нескольких одинаковых хаотических систем с помощью нового прогнозирующего управления. Главной особенностью метода является низкий уровень управляющего воздействия. Основным ограничением является необходимость точно знать модели подсистем, т. к. они ответственны за точность прогноза. Иначе говоря, предложенный подход не является робаст-

ным. Кроме того, предполагается, что помехи отсутствуют.

В [5, 11] рассматривается задача синхронизации по выходу двух вынужденных неидентичных осцилляторов, возбуждаемых внешними гармоническими сигналами. Причем ведомая подсистема снабжена управлением $u(t)$, которое применяется для приведения нелинейного разностного уравнения в линейную форму и достижения заданной точности синхронизации. Для формирования управления $u(t)$ использовано уравнение динамики в координатах ошибки (разностное уравнение), составленное путем вычитания уравнения ведомой подсистемы из уравнения ведущей системы.

Управление имеет обратную связь по ошибке синхронизации, а также содержит координаты ведущей системы. Управление состоит из двух частей. В нелинейную часть включены все нелинейные составляющие разностного уравнения. Таким тривиальным математическим приёмом осуществляется «компенсация» (в данном случае, сокращение) нелинейных составляющих. В результате исходное нелинейное разностное уравнение сводится к линейному уравнению. Коэффициенты усиления линейной части управления определяются из условия устойчивости приведенной линейной системы и выполнения заданной точности синхронизации.

Следует отметить ряд недостатков изложенной выше методики [5, 11] и других аналогичных подходов, использующих разностное уравнение:

- при незначительном изменении характеристик осцилляторов относительно реализованных в регуляторе нелинейных составляющих управления $u(t)$ сокращение будет неточным. Эта особенность может привести к потере грубости, т. е. нарушению фундаментальных свойств разностной системы, таких как устойчивость, управляемость, наблюдаемость, изменение топологии точек равновесия, разрыв второго рода функции управления и др. при сколь угодно малом изменении реквизитов объекта. Нарушение грубости в системах автоматического управления впервые обнаружено акад. Б.Н. Петровым [18];
- при некотором соотношении параметров и малом значении требуемой точности некоторые из коэффициентов регулятора принимает довольно высокое значение $k_2 > 200–5500$.

Учитывая указанные недостатки, в данной работе для синхронизации динамических объектов предлагается совершенно иной подход: для ведомых систем строим следящую робастную систему, в которой в качестве эталонной траектории (задания) используется выходной синхронизирующий сигнал $x(t)$ ведущего осциллятора. Построение следящей системы для широкого класса (ступенчатая, гармоническая, импульсная и др.) эталонных траекторий, особенно в нелинейном случае является довольно сложной задачей.

В данной статье для решения этой задачи с одновременным устранением структурной, параме-

трической и сигнальной (внешние неконтролируемое возмущения) неопределенностей ведомых осцилляторов использовано «робастное эквивалентное управление», предложенное в [19].

В частности, рассматривается методика синхронизации двух неидентичных вынужденных осцилляторов при наличии внешних гармонических возмущений, вызывающих также хаотическое движение. Тем не менее, метод пригоден для любого числа взаимосвязанных осцилляторов.

Формулировка задачи

Рассмотрим ведущую–ведомую систему синхронизации двух неидентичных вынужденных осцилляторов [5]:

Ведущая система:

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x})\dot{x} + G(x) = F_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1)$$

Ведомая система:

$$\ddot{y} + f(y, \dot{y})\dot{y} + g(y) = F_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u(t) + v(t), \quad (2)$$

где $\dot{}$ означает производную по времени; $f(\cdot)$, $F(\cdot)$ и $g(\cdot)$, $G(\cdot)$ – неидентичные (несовпадающие) функции; $F\cos(\cdot)$ – внешние гармонические возмущения; $u(t)$ – управляющее воздействие, подлежащее определению; $v(t)$ – неконтролируемое внешнее возмущение, в том числе, случайная помеха.

Предполагается, что во время функционирования параметры и структура функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ ведомого осциллятора, а также $v(t)$ могут изменяться в широких пределах.

Задача синхронизации заключается в построение такого управления $u(t)$, которое после завершения переходной составляющей обеспечивает отслеживание выхода $y(t)$ ведомого осциллятора (2) эталонной траектории $x(t)$ с заданной точностью $|e(t)| \leq \delta_s$, $\forall t \geq t_s$ и для любых начальных условий. Синхронизирующий сигнал $x(t)$ является выходом ведущего осциллятора (1).

Здесь $e(t) = x(t) - y(t)$ – ошибка синхронизации; δ_s , t_s – заданные допустимая ошибка синхронизации и время установления переходной составляющей.

Данная постановка соответствует координатной синхронизации по выходу [20]. Сигнал $x(t)$ может быть использован для синхронизации множества (сети) ведомых неидентичных объектов.

В общем случае ведомые системы являются взаимосвязанными по выходам $y_i(t)$, $i=1, \dots, m$. Влияние динамики других каналов на i -й выход принимается как неконтролируемое внешнее возмущение. Эта возможность позволяет осуществить сепарацию (разделение) прямых каналов « $u_i - y_i$ » без использования компенсаторов перекрестных каналов [21].

Опуская индекс i , динамику i -го сепаратного канала « $u_i - y_i$ » (i -я ведомая система) запишем скалярным дифференциальным уравнением более общего вида, чем (2):

$$y^{(n)} = f(y, t) + b(y, t)u, \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

где $y(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ – доступный измерению или оценке вектор состояния; $y \in R$ –

управляемый выход; $u \in R$ – управляющее воздействие; $f(y, t), b(y, t) > 0$ – нелинейные неизвестные ограниченные функции (генеральные составляющие неопределенной модели).

Применительно к ведомой системе (2) генеральные составляющие модели (3) являются:

$$f(y, t) = f(y, \dot{y})\dot{y} + g(y) + F_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad b(y, t) = 1.$$

Решение задачи

В [19] управление, обеспечивающее достаточное условие устойчивости $dV(e)/dt < 0$ получено в виде:

$$u(t) \equiv u_{\text{Req}} = ks(t), \quad (4)$$

где $V = 1/2s^2$ – функция Ляпунова; $s = c_1 e + c_2 \dot{e} + \dots + e^{(n-1)}$; $s = 0$ – многообразие, характеризующее гиперплоскость; k – достаточно большое число (коэффициент усиления регулятора); $k, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ – параметры настройки регулятора.

Регулятор (4) является PD-регулятором $n-1$ -го порядка. Реализация таких регуляторов связана с известными неудобствами.

При устремлении k в бесконечность в пределе замкнутая система регулирования с эталонной траекторией (задание) $x(t)$, объектом (3) и регулятором (4) описывается уравнением гиперплоскости [19]:

$$s = c_1 e + c_2 \dot{e} + \dots + e^{(n-1)} = 0, \quad s(0) = s_0. \quad (5)$$

Соответствующий характеристический полином замкнутой системы:

$$D_{\text{SYS}}(p) = p^{n-1} + c_{n-1}p^{n-2} + \dots + c_3p^2 + c_2p + c_1. \quad (6)$$

По аналогии с [22, 23] в [19] управление (4) названо «робастным эквивалентным управлением». Предложенное в [22, 23] указанных работах, для полностью определенных объектов, эквивалентное управление u_{eq} (эквивалентное управление Уткина–Дражениовича) обеспечивает движение системы в начало координат лишь из точек, расположенных на гиперплоскости $s=0$. «Робастное эквивалентное управление» (4) при достаточно большом коэффициенте усиления k обеспечивает движение системы в начало координат из произвольной начальной точки $s(0)=s_0$ (рис. 3, б). Поэтому здесь нет необходимости дополнять эквивалентное управление стабилизирующим управлением [24].

Определение параметров настройки

При движении из произвольной точки $s(0)=s_0$ система при достаточно большом коэффициенте усиления k почти мгновенно попадает на гиперплоскость (5) и в дальнейшем двигается по этой плоскости в начало координат (рис. 3, б). Поэтому движение системы может быть описано уравнением гиперплоскости $s=0$. Это движение определяется первыми $n-1$ начальными условиями $e_i(0) = (e(0), \dot{e}(0), \dots, e^{(n-2)}(0))^T \in \{e: s=0\}$. В действительности движение является непрерывным процессом. Поэтому вместо точки попадания уместно использовать термин «точка перегиба».

Определение параметров $c_i, i=1, 2, \dots, n-1$. Качественные показатели (время установления t_s , перерегулирование $\sigma\%$ и др.) переходной характеристики по ошибке синхронизации $e(t)$ зависят от параметров настройки $c_i, i=1, \dots, n-1$ регулятора (4). Поскольку порядки регулятора (4) и характеристического уравнения замкнутой системы (6) одинаковы, то путем подбора параметров $c_i, i=1, \dots, n-1$ можно разместить все полюса системы по желаемой схеме.

В общем случае характеристический полином (6) можно выбрать в виде эталонных полиномов Баттерворса, Чыбышева или же полинома, минимизирующего некоторый интегральный показатель качества.

Потребуем, чтобы переходная характеристика по ошибке $e(t)$ не имела перерегулирования, т. е. являлась монотонной. С этой целью для корней (полюсы системы) p_i характеристического полинома $D_{\text{SYS}}(p)$ (6) выберем биномиальное распределение. При таком распределении $p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1}$. Кратность корней позволяет определить их на основе заданных допустимой ошибки синхронизации δ_s и времени установления t_s .

При кратных корнях выражение (6) можно записать в виде:

$$D_{\text{SYS}}(p) = (p + p_1)^{n-1} = p^{n-1} + c_{n-1}p^{n-2} + \dots + c_3p^2 + c_2p + c_1. \quad (7)$$

В [19] изложена методика определения $c_i, i=1, \dots, n-1$ в общем случае.

Для $n=2$ имеем один параметр настройки c_1 , который после определения p_1 из решения трансцендентного уравнения

$$f(p_1) = e(0) \exp(-p_1 t_s) \mp \delta_s / 100 = 0 \quad (8)$$

определяется согласно (7): $c_1 = p_1$.

Если $e(0) > 0$, то и $\delta_s > 0$ (приближение сверху), иначе $\delta_s < 0$.

Уравнение (8) можно решить с помощью функции Matlab: *solve* ('f(p1)=0').

При реализации уравнения регулятора в виде передаточной функции значения c_i можно не вычислять, а передаточную функцию регулятора реализовать на основе выражения:

$$W_c(p) \approx k \frac{(p + p_1)^{n-1}}{(T_d p + 1)^{n-1}}.$$

Здесь $T_d = 0,001-0,02$ – постоянная времени реального дифференцирующего звена.

Определение коэффициента усиления k . Этот параметр связан с объектом и настраивается на доминирующий источник, вызывающий максимальное отклонение ошибки $e(t)$ от заданного δ_s . Поэтому k определяется экспериментально при компьютерном моделировании или на реальном объекте.

Если доминирующий источник известен, то его нужно реализовать, вызывая наихудший режим. Увеличивая k , следует контролировать ошибку слежения $e(t)$ в точке $t=t_s$ и добиться вхождения траектории $e(t)$ в коридор допустимой ошибки, т. е. выполнения условия $e(t) \leq |\delta_s|/100$ для всех $t \leq t_s$.

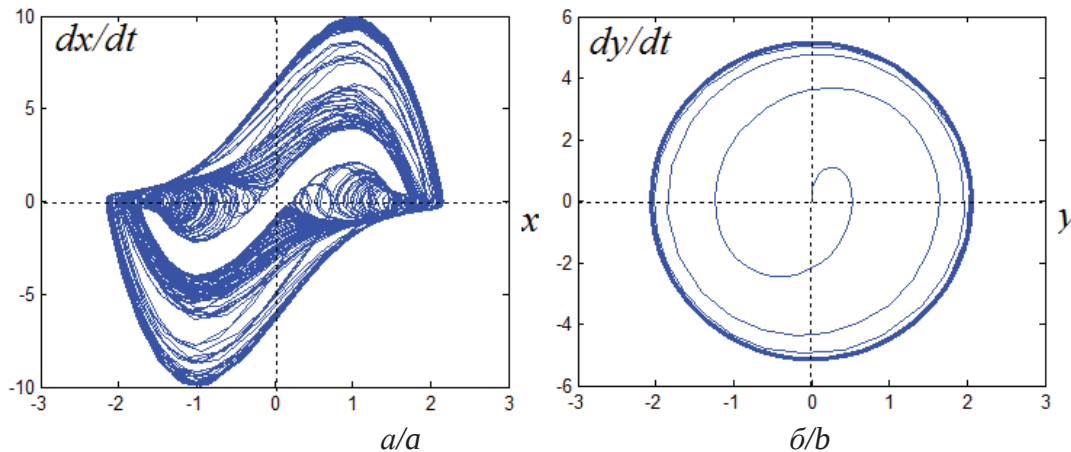


Рис. 1. Аттрактор: а) ведущего хаотического осциллятора Ван дер Поля; б) ведомого осциллятора

Fig. 1. Attractor of: a) the main chaotic oscillator of Van der Pol; b) a slave oscillator

После некоторого значения k в системе устанавливаются заданные σ % и t_s . Однако не следует злоупотреблять значением k , поскольку это может привести к перерасходу энергии. Если энергия управления строго регламентирована, например, в подвижных или летательных аппаратах, то целесообразно использовать самонастройку k в зависимости от ошибки $e(t)$, поддерживая k на минимальном уровне.

Результаты моделирования

Предполагается, что модель ведомого осциллятора имеет структурно-параметрическую неопределенность. Структурная неопределенность отражается в изменении порядка члена y^4 на ± 50 % от номинального $k=3$ во втором примере.

Пример 1. Рассмотрим следующую систему синхронизации [5].

Ведущая система:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = F_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (9)$$

Ведомая система:

$$\ddot{y} + c\dot{y} + dy = F_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + v(t) + u(t), \quad (10)$$

Параметры ведущей системы $\mu=5$, $F_0=5$, $\omega_0=2,465$, $\varphi_0=0$. Начальные условия $x(0)=2$, $\dot{x}(0)=2$. Параметры ведомой системы: $c=1$, $d=6$, $F_1=5,2$, $\omega_1=2,5$, $\varphi_1=0,1$. Начальные условия нулевые $y(0)=\dot{y}(0)=0$. Параметры внешних гармонических сигналов не совпадают.

Ведущим является вынужденный осциллятор Ван дер Поля, хотя он при отсутствии внешнего гармонического сигнала $F_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ является обычной нелинейной автоколебательной системой с регулярными колебаниями. Ведомым – вынужденный осциллятор с устойчивым предельным циклом, а при отсутствии внешнего гармонического сигнала и $u(t)=0$ характеризуется затухающим колебательным процессом.

На рис. 1, а и б показаны соответствующие аттракторы при наличии внешнего гармонического возбуждения.

На объект в точке приложения управления действует Гауссовская помеха представленная на рис. 2.

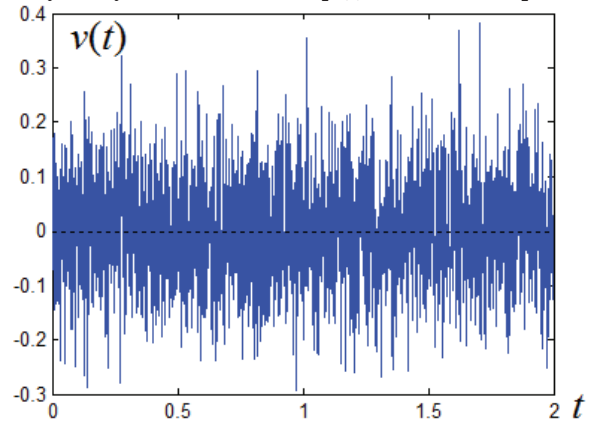


Рис. 2. Гауссовская помеха

Fig. 2. Gaussian disturbance

Определим параметр настройки c_1 . Начальное условие $e_s(0)=x(0)-y(0)=2-0=2$. Пусть $\delta_s=2$ %, $t_s=0,5$ с. Тогда уравнение (8)

$$f(p_1) = e(0)e^{-p_1 t_s} - 0,02 = 2e^{-0,5 p_1} - 0,02 = 0.$$

Используя функцию $\text{solve}(\cdot)$ находим $p_1=9,2$. Выражение (7) $D_{\text{sys}}=p+9,2 \Rightarrow c_1=9,2$. В результате уравнение робастного PD-регулятора (4): $u_{\text{Reg}}(t)=k(9,2e+\dot{e})$.

На рис. 3, а, б при номинальных значениях $c=1$, $d=6$ показаны графики изменения ошибки синхронизации $e(t)=x(t)-y(t)$ в зависимости от коэффициента усиления k и фазовый портрет по ошибке $e(t)$.

При $k=120$ уже выполняются заданные показатели качества $\sigma=0$ %, $t_s=0,5$ с. Дальнейшее увеличение k не оказывает ощутимого влияния на показатели качества, однако приводит к увеличению энергии управления. Фазовый портрет системы (рис. 3, б) построен при начальных условиях $y(0)=[0;1;1,5;3;3,5;5]$, $\dot{y}(0)=[0,0,18,0,-18,0]$. Как видно, при $k=120$ все траектории стягиваются к линии $s=9,2e+\dot{e}=0$.

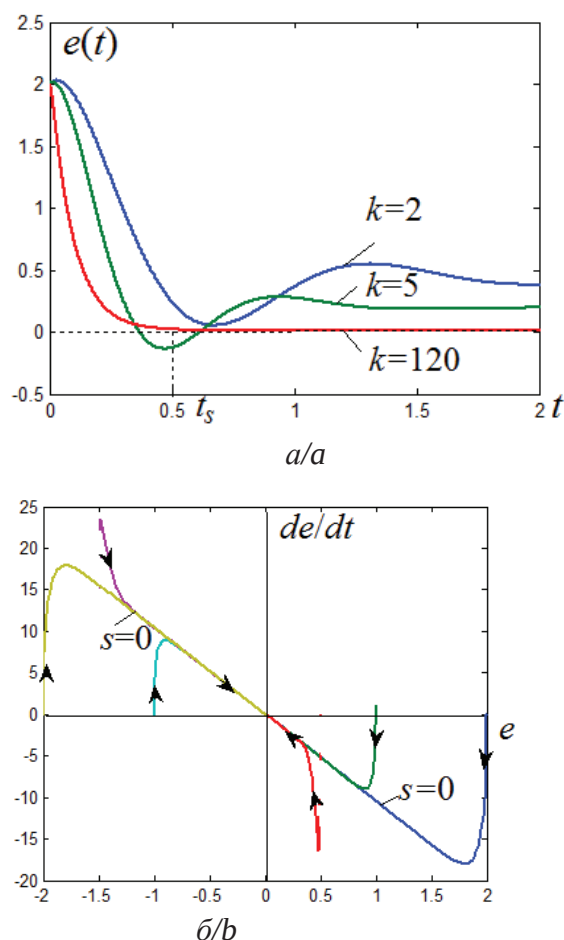


Рис. 3. а) графики изменения ошибки; б) фазовый портрет ведомой системы

Fig. 3. a) error variance graphs; b) phase pattern of a slave system

На рис. 4 показаны соответствующие переходные процессы по ошибке синхронизации $e(t)$.

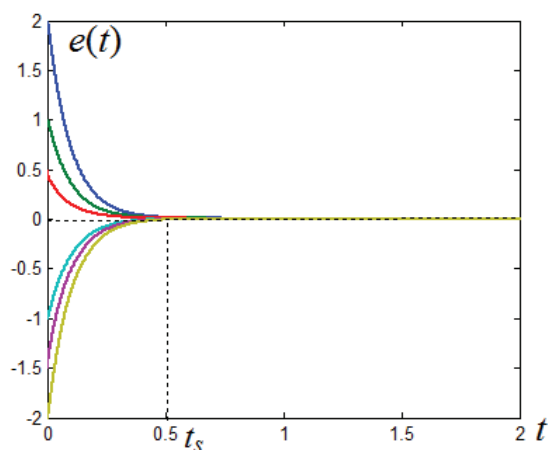


Рис. 4. Переходные процессы по ошибке для различных начальных условий

Fig. 4. Error transients for various initial conditions

Не смотря на значительный разброс начальных условий, наблюдается большая концентрация траекторий в окрестности точки $t=t_s \approx 0,5$.

Рассмотрим случай параметрической неопределенности. Пусть параметры c и d меняются на 50 % от своих номинальных значений на интервале $0,5 \leq c \leq 1,5$; $3 \leq d \leq 9$. Моделирование выполнено для семи значений параметров c и d , взятых из указанных выше интервалов.

На рис. 5, а-в при $k=120$ показаны выходной синхронизирующий сигнал $x(t)$ ведущего осциллятора (9), пучки переходных характеристик $\{y(t)\}$ ведомого осциллятора (10) и сигнал управления $\{u(t)\}$.

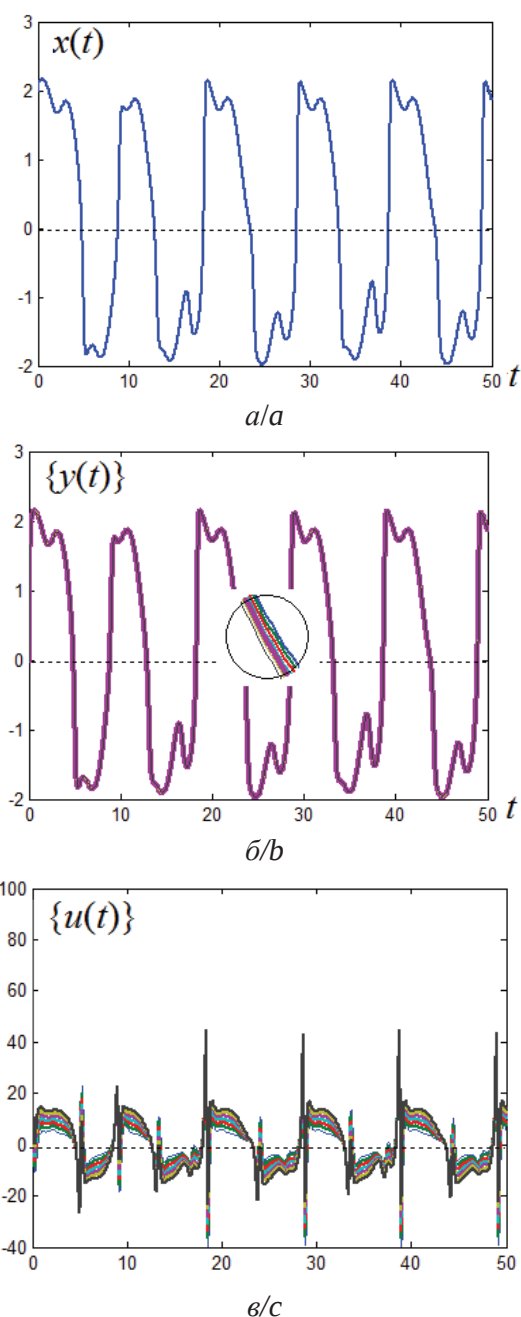


Рис. 5. Переходные характеристики (а), (б); сигнал управления (в) при одновременном изменении параметров c и d

Fig. 5. Transient behavior (a), (b); control signal (c) at simultaneous change of parameters c and d

Концентрация пучков $\{y(t)\}$ довольно высокая, что указывает на высокие робастные свойства предложенной методики. Через $t_s=0,5$ с выход $\{y(t)\}$ ведомого осциллятора (10) начинает довольно точно отслеживать выходной синхронизирующий сигнал $x(t)$ ведущего осциллятора (9).

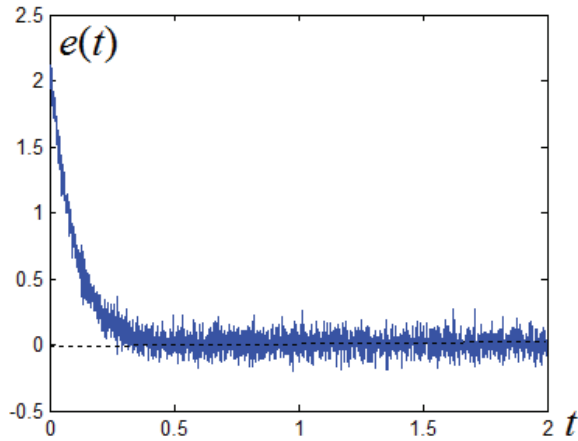


Рис. 6. Ошибка синхронизации при зашумленном эталонном сигнале

Fig. 6. Timing error at noisy reference signal

В подавлении действующей на вход объекта помехи $u(t)$ кроме деления на коэффициент усиления k существенную роль играет и фильтрующее свойство самого объекта.

На рис. 6 для номинальной системы ($c=1$, $d=6$ и $k=120$) показана ошибка синхронизации при зашумленном эталонном сигнале $\tilde{x}(t)=x(t)+u(t)$.

Интервал изменения установившейся ошибки составляет $-0,1 \leq e(t) \leq 0,1$, $t \geq 0,5$ с и путем увеличения k без использования фильтра нижних частот не уменьшается. Причиной тому является то, что, в отличие от первого случая, здесь помеха имеет непосредственный доступ в регулятор и поэтому усиливается в $k=120$ раз. За счет дифференцирования также происходит ощутимое увеличение уровня помехи. Однако при прохождении зашумленного сигнала через объект он выступает в роли фильтра нижних частот и содействует уменьшению дисперсии выхода.

Пример 2. Рассмотрим еще один пример из [5]:
Ведущая система:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + dx = F_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (11)$$

Ведомая система:

$$\ddot{y} + \lambda \dot{y} + \alpha y + \gamma y^a = F_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u(t). \quad (12)$$

Параметры и начальные условия:

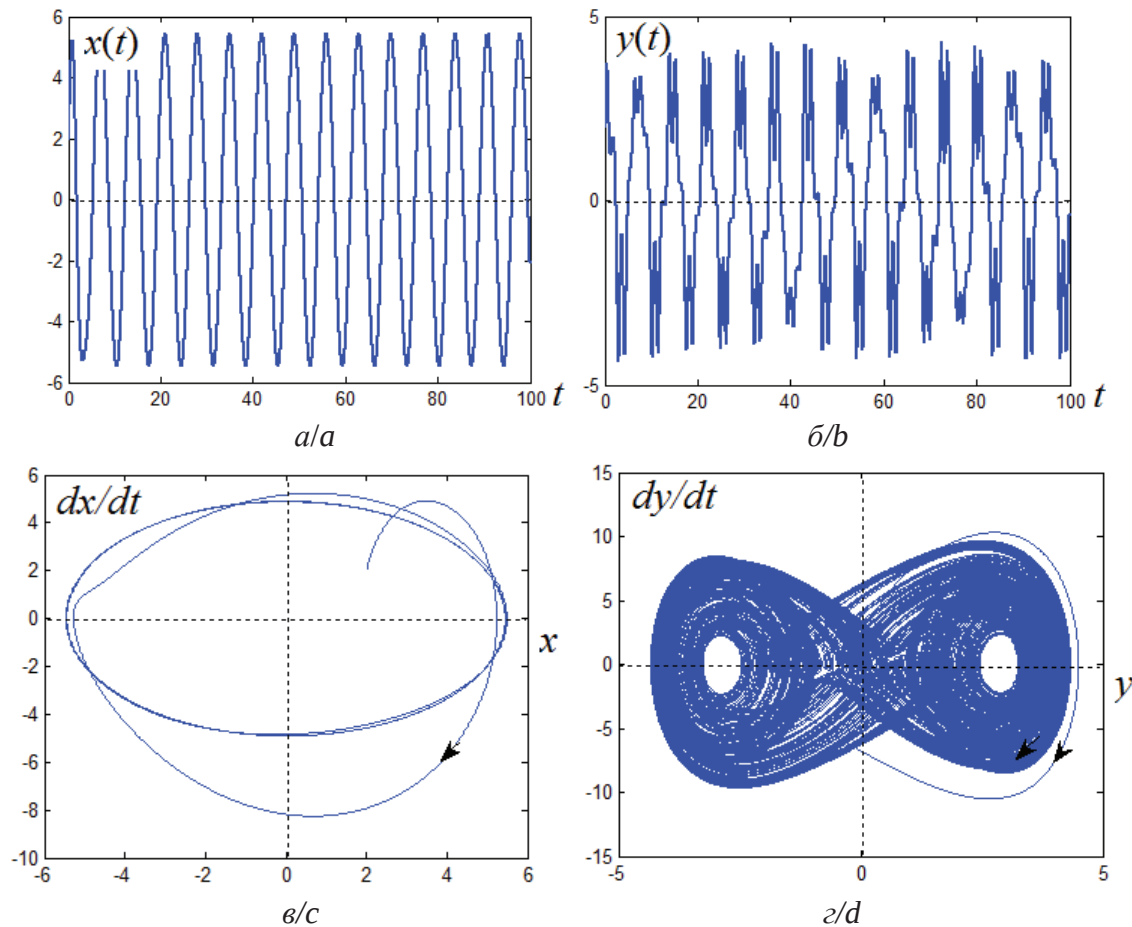


Рис. 7. Переходные характеристики (а), (б) и аттракторы (в), (г) ведущей и ведомой систем

Fig. 7. Transient behavior (a), (b) and attractors (c), (d) of the main and slave systems

$$\begin{aligned} c &= 1, d = 6, F_0 = 28,7, \omega_0 = 0,9, \varphi_0 = 0,1, \\ x(0) &= \dot{x}(0) = 0; \lambda = 0,2, \alpha = 1,0, \gamma = 1,0, \\ F_1 &= 28,5, \omega_1 = 0,86, \varphi_1 = 0, y(0) = \dot{y}(0) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $u(t)=0$.

В этом примере ведущей является линейная система с затухающей колебательной весовой характеристикой, преобразованной с помощью внешнего гармонического сигнала в вынужденный осциллятор. Ведомой системой является вынужденный хаотический осциллятор Дуффинга.

На рис. 7, а-г показаны выходные сигналы и аттракторы ведущей (11) и ведомой (12) систем при наличии внешнего гармонического возбуждения.

Свободное движение ведомой подсистемы Дуффинга (12) при отсутствии внешнего гармонического возбуждения и $u(t)=0$ является обычным затухающим нелинейным колебательным процессом с устойчивым положением равновесия в начале координат $y(0)=(0;0)^T$ (рис. 8).

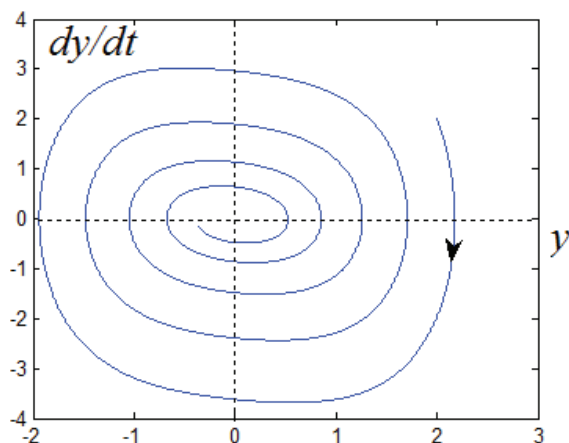


Рис. 8. Фазовый портрет свободного движения ведомой подсистемы Дуффинга (14)

Fig. 8. Phase pattern of free movement of Duffing slave system (14)

Приложение внешнего сигнала $F_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ вырождает ведомую систему Дуффинга (12) в хаотический осциллятор с непрогнозируемой динамикой. Вообще говоря, если с помощью внешнего возбуждения в детерминированной системе можно вызвать хаос, то этот способ может быть использован при кодировании информации [25].

На рис. 9 для управления $u_{\text{Ref}}(t) = k(9,2e + e.)$ показана установившаяся ошибка синхронизации при $k=200$ и $k=800$. В последнем случае ошибка синхронизации $e(t)$ подгоняется в заданный интервал $-0,02 \leq e(t) \leq 0,02$.

Теперь рассмотрим свойства робастности предложенной методики для параметрической неопределенности. Предположим, что при эксплуатации параметры ведомого осциллятора (12) меняются на 50 % от своих номинальных значений на интервале: $0,1 \leq \lambda \leq 0,3$; $0,5 \leq \alpha \leq 1,5$; $0,5 \leq \gamma \leq 1,5$; $1,5 \leq a \leq 3,5$.

На рис. 10, а-в при $k=800$ показаны пучки выходного сигнала $\{y(t)\}$, управления $\{u(t)\}$ и ошибок синхронизации $\{e(t)\}$ при $y=(0; 20)^T$ для пяти комбинаций параметров $\lambda, \alpha, \gamma, a$.

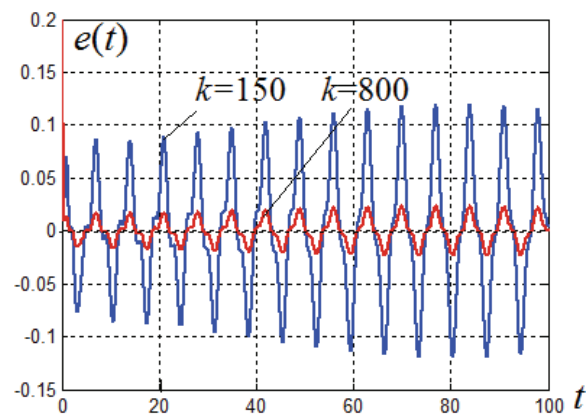


Рис. 9. Графики изменения установившейся ошибки при различных коэффициентах усиления регулятора

Fig. 9. Graphs of variance of steady-state error at different controller gains

Концентрация пучков $\{y(t)\}$ довольно высокая, что указывает на хорошие робастные свойства предложенной методики. Однако для выбранных довольно широких интервалов изменения параметров максимальное значение управления получается довольно высоким — $u_{\text{max}} \approx |700|$.

Пример 3. Синхронизация хаотических систем. Рассмотрим случай, когда ведущим является хаотическая система Лоренса (1963) [26], а ведомым — вынужденный хаотический осциллятор Дуффинга (1918) [5].

Ведущая система:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \quad (13)$$

Ведомая система:

$$\ddot{y} + \lambda \dot{y} + \alpha y + \gamma y^a = F_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + v(t) + u(t). \quad (14)$$

Параметры и начальные условия: $\sigma=10, r=97, b=8/3, x(0)=1, y(0)=z(0)=0; \lambda=0,2, \alpha=1,0, \gamma=1,0, F_1=28,5, \omega_1=0,86, \varphi_1=0, y(0)=\dot{y}(0)=0$.

На рис. 11, а и б для ведущей системы (13) показаны нерегулярные колебания по $x(t)$ и аттрактор на плоскости (X, Y, Z) .

Пусть качественные показатели системы $t_s=2$ с, $\delta_s=0,02$. Тогда для $e(0)=x(0)-y(0)=1-0=-1$ кратный корень $p_1=c_1=3,43 \Rightarrow u=k(3,43e + e.)$.

На рис. 12, а и б при $k=250$ показаны эталонная траектория $x(t)$, переходной процесс $y(t)$ при $x(0)=1, y=(0; 20)^T$ и ошибка синхронизации $e(t)$.

После момента времени $t \geq t_s=2$ с в ведомой системе устанавливаются нерегулярные колебания, соответствующие синхронизирующему сигналу $x(t)$. На рис. 13 показан сигнал управления $u(t)$.

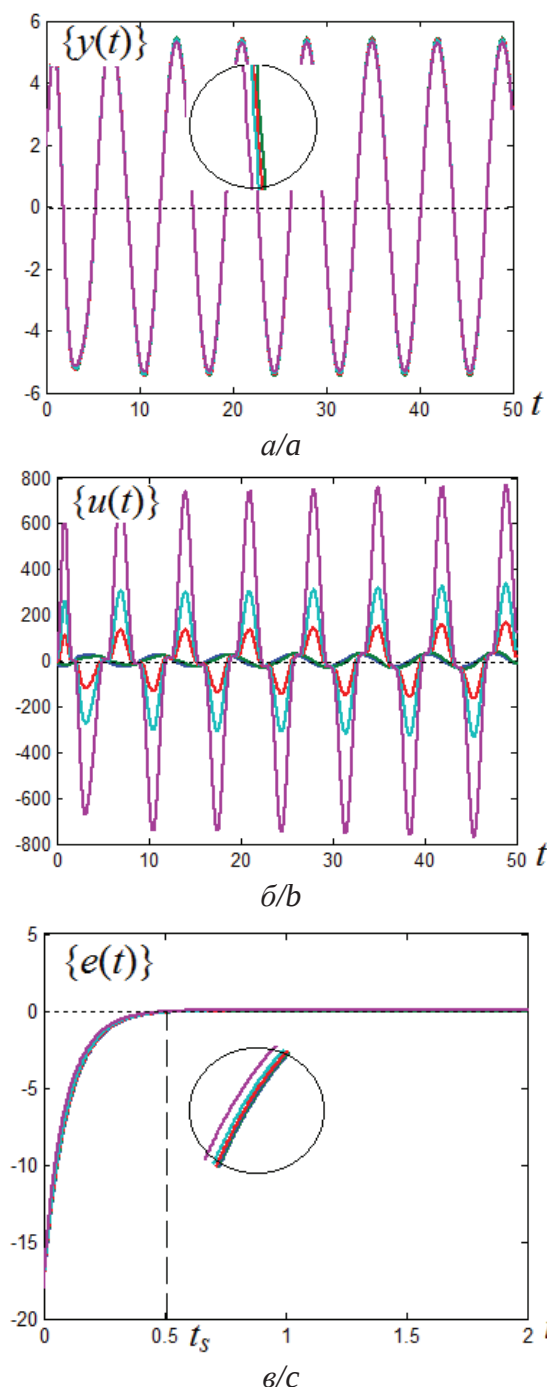


Рис. 10. а) переходные характеристики; б) сигнал управления; в) ошибка синхронизации при одновременном изменении параметров λ , α , γ , a

Fig. 10. a) transient behavior; b) control signal; c) timing error at simultaneous change of parameters λ , α , γ , a

Высокий уровень управления $u_{\max} \approx 4 \cdot 10^4$ вызван наличием нелинейного члена $y^3(t)$.

Теперь рассмотрим свойство робастности. Пусть, как и во втором примере, параметры ведомого осциллятора (14) меняются на 50 % от своих номинальных значений: $0,1 \leq \lambda \leq 0,3$; $0,5 \leq \alpha \leq 1,5$; $0,5 \leq \gamma \leq 1,5$; $1,5 \leq a \leq 3,5$.

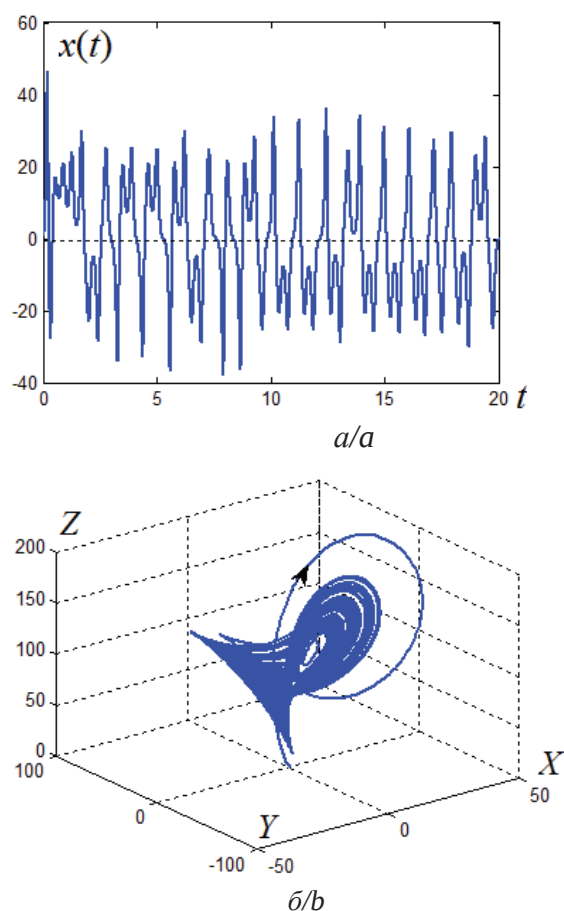


Рис. 11. а) решение уравнения Лоренса по $x(t)$; б) аттрактор в трехмерном пространстве

Fig. 11. a) solution of Lawrence equation by $x(t)$; b) attractor in three-dimensional space

На рис. 14, а и б при $k=250$ показаны пучки выходного сигнала $\{y(t)\}$ и сигнала управления $\{u(t)\}$ для трёх значений параметров λ , α , γ , a .

Высокая концентрация пучков указывает на высокие робастные свойства предложенной методики.

Для всех примеров параметры конфигурации Simulink-схемы: Type—Fixed-step; size—0,001; solver—ode2.

Выводы

В работе предложен один из возможных подходов к робастной синхронизации неидентичных взаимосвязанных неопределённых динамических систем, в том числе регулярных и хаотических осцилляторов с ведущей системой (лидером).

Метод основан на построении робастной следящей системы управления для каждой ведомой системы. Причем эталонной траекторией (заданием) для всех подсистем является выходной сигнал ведущей системы. Возможность беспредельного увеличения коэффициента усиления регулятора без потери устойчивости позволяет подавлять гене-

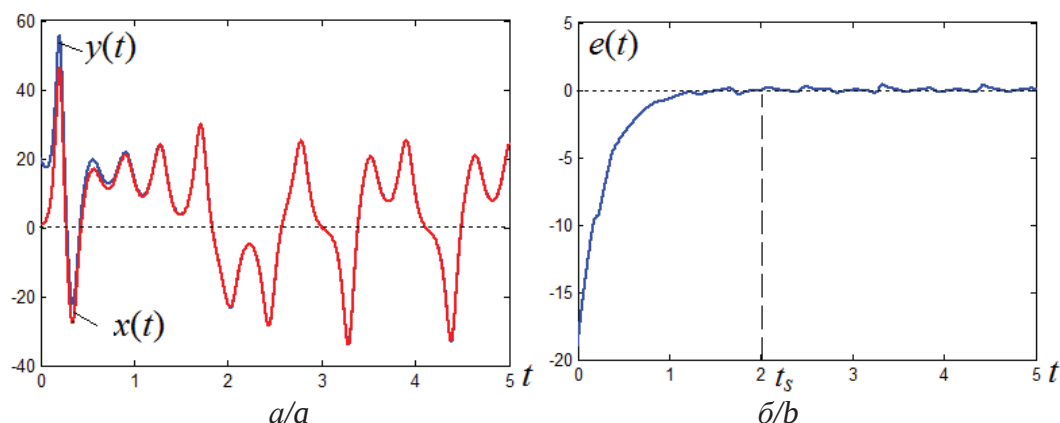


Рис. 12. а) выходные сигналы ведущей и ведомой систем; б) ошибка синхронизации

Fig. 12. a) output signals of the main and slave systems; b) timing error

ральные составляющие неопределенных моделей ведомых систем до сколь угодно малой величины. Этим обеспечивается высокая точность слежения эталонной траектории (синхронизирующего сигнала) для широкого класса неопределенностей.

Главной особенностью метода является использование нового типа управления – «робастное эквивалентное управление», позволяющего строить следящие робастные системы управления и выполнить развязку взаимосвязанных ведомых систем без использования компенсаторов перекрестных каналов.

При одинаковых n для всех ведомых систем можно использовать один регулятор.

К недостаткам предложенной методики следует отнести:

- отсутствие аналитической формулы для определения коэффициента усиления k ;
- система настраивается на доминирующий источник и должна «дежурить», ожидая появления наихудшего режима, оставаясь в напряже-

нии. Этот недостаток можно исключить путем самонастройки коэффициента усиления регулятора, поддерживая его на минимальном уровне;

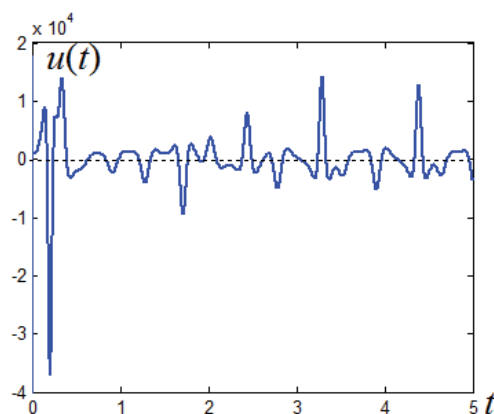


Рис. 13. Кривая изменения сигнала управления

Fig. 13. Control signal change curve

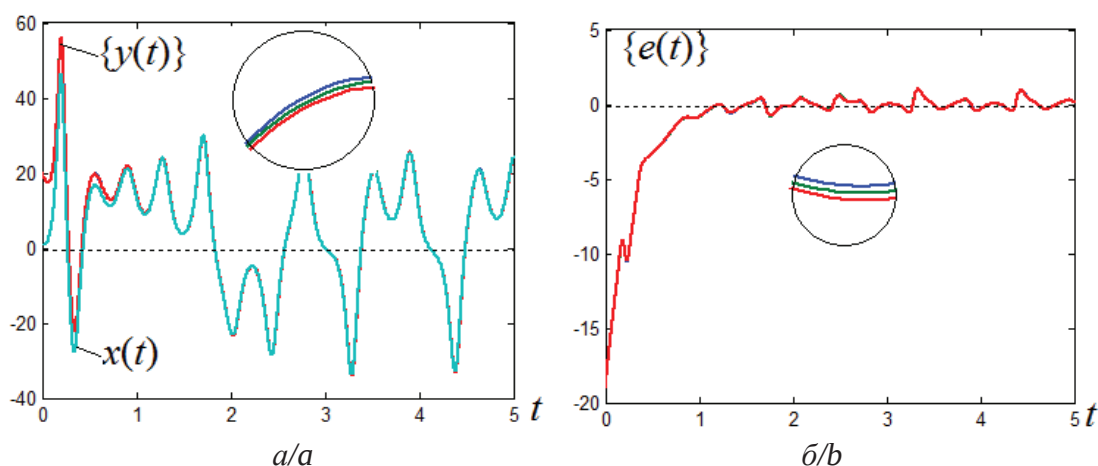


Рис. 14. Пучки выходного сигнала ведомого хаотического осциллятора и ошибок синхронизации

Fig. 14. Bunches of an output signal of a slave chaotic oscillator and timing errors

- низкая помехозащищенность по отношению к высокочастотным помехам, имеющим непосредственный доступ в регулятор;
- использование производных выхода для формирования РД-регулятора;
- не все объекты допускают реализацию чрезмерно высокого коэффициента усиления.

Многие инерционные, например промышленные, электромеханические и др., объекты облада-

ют свойствами фильтра нижних частот. Поэтому усиление высокочастотных помех за счет умножения на большой коэффициент и операции дифференцирования не заслуживает повсеместной критики.

Решение модельных задач с использованием пакета *Matlab/Simulink* позволило сделать ряд положительных выводов, имеющих важное прикладное значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. – СПб.: Наука, 2003. – 208 с.
2. Осипов Г.В., Половинкин А.В. Синхронизация внешним периодическим воздействием. – Нижний Новгород: Изд-во НГТУ, 2005. – 78 с.
3. Кузнецов А.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Вынужденная синхронизация двух связанных автоколебательных осцилляторов Ван дер Пола // Нелинейная динамика. – 2011. – Т. 7. – № 3. – С. 411–425.
4. Джунусов И.А., Фрадков А.Л. Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходу // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 8. – С. 41–52.
5. Synchronization with error bound of non-identical forced oscillators / J. Wang, J. Cai, M. Ma, J. Feng // Kybernetika. – 2008. – V. 44. – № 4. – P. 534–545.
6. Njah A.N., Vincent U.E. Chaos synchronization between single and double wells Duffing–Van der Pol oscillators using active control // Chaos, Solitons and Fractals. – 2008. – September. – V. 37. – № 5. – P. 1356–1361.
7. Wu X.F., Cai J.P., Zhao Y. Revision and improvement of a theorem for robust synchronization of nonidentical Lur'e systems // IEEE Trans. Circuits and Systems-II 52. – 2005. – P. 429–432.
8. Fradkov A. Decentralized adaptive controller for synchronization of dynamical networks with delays and bounded disturbance / IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. – Orlando, 2011. – P. 1110–1115.
9. Джунусов И.А., Фрадков А.Л. Адаптивная синхронизация сети нелинейных систем Лурье // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2011. – № 4. – С. 12–18.
10. Фуртат И.Б. Робастная синхронизация сети взаимосвязанных нелинейных систем с компенсацией возмущений // Проблемы управления. – 2011. – № 4. – С. 46–52.
11. Wu X.F., Cai J.P., Wang M.H. Robust synchronization of chaotic horizontal platform systems with phase difference. Journal of Sound and Vibration. – 2007. – V. 305. – № 3. – P. 481–491.
12. Cai J.P., Wu X.F., Chen S.H. Synchronization criteria for non-autonomous chaotic systems via sinusoidal state error feedback control // Physica Scripta. – 2007. – V. 75. – № 3. – P. 379–387.
13. Wang J.G., Zhao Y. Chaotic synchronization of the master slave chaotic systems with different structures based on bang-bang control principle // Chinese Phys. Lett. – 2005. – V. 22. – № 3. – P. 2508–2510.
14. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. – 1990. – V. 64. – № 5. – P. 821–824.
15. Polyak B.T., Maslov V.P. Controlling chaos by predictive control / Proc. 16th World IFAC Congr. – Praha, 2005. – P. 1791–1804.
16. Поляк Б.Т. Стабилизация хаоса методом прогнозирующего управления // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 11. – С. 99–113.
17. Ефремов С.В., Поляк Б.Т. Синхронизация хаотических систем с помощью прогнозирующего управления // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 12. – С. 40–50.
18. Петров Б.Н. О реализуемости условий инвариантности // Теория инвариантности и её применение в автоматических устройствах: Труды 1-го Всесоюзного совещания по теории инвариантности. – Киев, 16–20 октября 1958. – М.: Изд-во АН СССР. – 1959. – С. 59–80.
19. Рустамов Г.А. Робастная система управления с повышенным потенциалом // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 324. – № 5. – С. 13–19.
20. Generalized synchronization of chaos / N.F. Rulkov, M. Sushchir, L.S. Tsimring, H.D. Abarbanel // Phys. Rev. E. – 1995. – V. 51. – P. 980–994.
21. Rustamov G.A. Design of Absolutely Robust Control Systems for Multilinked Plant on the Basis of an Uncertainty Hyperobserver // Automatic Control and Computer Sciences. – 2014. – V. 48. – № 3. – P. 129–143.
22. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
23. Drzenovic B. The invariance conditions in variable structure systems // Automatica. – 1969. – V. 5. – № 3. – P. 287–295.
24. Rustamov G.A. Absolutely robust control systems // Automatic Control and Computer Sciences. – 2013. – V. 47. – № 5. – P. 227–241.
25. Андреев В.В., Сапожников Ю.В., Фомичев А.И. Детерминированный хаос и кодирование информации // Прикладная информатика. – 2009. – Т. 24. – № 6. – С. 80–87.
26. Лоренц Э. Детерминированное неперiodическое движение // Странные аттракторы. Сборник статей. – М.: Физматлит, 1981. – С. 88–116.

Поступила 23.08.2014 г.

UDC 517.9:681.5

SYNCHRONIZATION OF NON-IDENTICAL DYNAMIC SYSTEMS WITH ROBUST EQUIVALENT CONTROL

Gazanfar A. Rustamov,

Dr. Sc., Azerbaijan Technical University, 25, G. Javid avenue, Baku,
AZ1073, Azerbaijan. E-mail: gazanfar.rustamov@gmail.com

Relevance of the study is caused by the need to improve the effectiveness of approaches to synchronization of non-identical interconnected dynamical systems under conditions of considerable uncertainty.

The main aim of the study is to design a robust tracking system for the slave systems, the reference trajectory (task) for which is a synchronized output signal of the master system; to evaluate the implementation of specific dynamic and static parameters, such as settling time of the transient component and the allowable synchronization error; to study robust properties at deviation of slave system parameters from the nominal ones by $\pm 50\%$.

Method of study: the method of Lyapunov function, automatic control theory, the elements of synchronization and chaos theory; simulation on Matlab/Simulink. The main feature of the method is the use of a new type of controls – «robust equivalent control» – to design robust control systems and to interchange interconnected slave systems without compensators of joints cross channels. Robust controller is the PD^{-1} controller with adjustable gain. The possibility of infinite gain magnification without loss of stability allows suppressing general components of uncertain models of slave systems to an arbitrarily small value. This ensures a high tracking (timing) accuracy of the reference trajectory for a wide range of uncertainties.

Results and conclusions. Numerical modeling of synchronization systems with different internally regular and chaotic oscillators has shown simplicity and high efficiency of the proposed approach. Really, the synchronization error can be reduced to an arbitrarily small value. However, this requires the use of high gain values of the regulator. High performance of robust dynamic mode is achieved. This is proved by the high concentration of beams of transient characteristics of slave systems in the vicinity of the nominal trajectory. The author managed to avoid the mathematical difficulties occur when synthesizing robust tracking systems. The disadvantages of the proposed methodology are reinforcement of the high-frequency interferences having immediate access to the controller as well as the use of output derivative to form PD^{-1} controller. Moreover, not every object is capable of implementing the high gain.

Key words:

Synchronization, robust tracking system, Lyapunov function, high gain, robust equivalent control, coding, chaos of Lorenz and Duffing.

REFERENCES

1. Fradkov A.L. *Kiberneticheskaya fizika: printsipy i primery* [Cybernetic physics: principles and examples]. St. Petersburg, Nauka Publ., 2003. 208 p.
2. Osipov Q.V., Polovinkin A.V. *Sinkhronizatsiya vneshnim periodicheskim vozdeystviem* [Synchronization by external periodic impact]. Nizhny Novgorod, NQQU Publishing house, 2005. 78 p.
3. Kuznetsov A.P., Satayev I.P., Tyuryukina L.V. Vynuzhennaya sinkhronizatsiya dvukh svyazannykh avtokolebatelnykh ostillyatorov Van der Pola [Forced synchronization of two coupled self-oscillators of Van der Pol]. *Nelineynaya dinamika – Non-linear Dynamics*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 411–425.
4. Dzhunusov I.A., Fradkov A.L. Sinkhronizatsiya v setyakh lineynykh agentov s obratnymi svyaziyami po vykhodu [Synchronization in networks of linear agents with output feedback]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and telemechanics*, 2011, no. 8, pp. 41–52.
5. Wang J., Cai J., Ma M., Feng J. Synchronization with error bound of non-identical forced oscillators. *Kybernetika*, 2008, vol. 44, no. 4, pp. 534–545.
6. Njah A.N., Vincent U.E. Chaos synchronization between single and double wells Duffing–Van der Pol oscillators using active control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, September, vol. 37, no. 5, pp. 1356–1361.
7. Wu X.F., Cai J.P., Zhao Y. Revision and improvement of a theorem for robust synchronization of non-identical Lur'e systems. *IEEE Trans. Circuits and Systems-II* 52, 2005, pp. 429–432.
8. Fradkov A. Decentralized adaptive controller for synchronization of dynamical networks with delays and bounded disturbance. *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. Orlando, 2011, pp. 1110–1115.
9. Dzhunusov I.A., Fradkov A.L. Adaptivnaya sinkhronizatsiya seti nelineynykh sistem Lurye [Adaptive synchronization of a network of non-linear Lur'e systems]. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie – Mechatronics, automation, control*, 2011, no. 4, pp. 12–18.
10. Furtat I.B. Robastnaya sinkhronizatsiya seti vzaimosvyazannykh nelineynykh sistem s kompensatsiyey vozmushcheniy [Robust synchronization of a network of interconnected nonlinear systems with disturbance compensation]. *Problemy upravleniya – Control problems*, 2011, no. 4, pp. 46–52.
11. Wu X.F., Cai J.P., Wang M.H. Robust synchronization of chaotic horizontal platform systems with phase difference. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 305, no. 3, pp. 481–491.
12. Cai J.P., Wu X.F., Chen S.H. Synchronization criteria for non-autonomous chaotic systems via sinusoidal state error feedback control. *Physica Scripta*, 2007, vol. 75, no. 3, pp. 379–387.
13. Wang J.G., Zhao Y. Chaotic synchronization of the master slave chaotic systems with different structures based on bang-bang control principle. *Chinese Phys. Lett.*, 2005, vol. 22, no. 3, pp. 2508–2510.
14. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, no. 5, pp. 821–824.
15. Polyak B.T., Maslov V.P. Controlling chaos by predictive control. *Proc. 16th World IFAC Congr.* Prague, 2005. pp. 1791–1804.
16. Polyak B.T. Stabilizatsiya khaosa metodom prognoziruyushchego upravleniya [Stabilization of chaos by predictive control]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and telemechanics*, 2005, no. 11, pp. 99–113.
17. Efremov S.V., Polyak B.T. Sinkhronizatsiya khaoticheskikh sistem s pomoshchyu prognoziruyushchego upravleniya [Synchronization of chaotic systems with predictive control]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and telemechanics*, 2005, no. 12, pp. 40–50.
18. Petrov B.N. O realizuemosti usloviy invariantnosti [On implementation of the invariance conditions]. *Teoriya invariantnosti i ee primeneniye v avtomaticheskikh ustroystvakh: trudy 1-go Vses-*

- oyuznogo soveshchaniya po teorii invariantnosti [Theory of invariance and its application in automated devices. Proc. 1st All-Union meeting in the theory of invariance]. Kiev, 16–20 October 1958. Moscow, Publishing house of AoS of USSR, 1958. pp. 59–80.
19. Rustamov G.A. Robastnaya sistema upravleniya s povyshennym potentsialom [Robust control system with increased potential]. *Bulletins of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 324, no. 5, pp. 13–19.
20. Rulkov N.F., Sushchir M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D. Generalized synchronization of chaos. *Phys. Rev. E.*, 1995, vol. 51, pp. 980–994.
21. Rustamov G.A. Design of Absolutely Robust Control Systems for Multilinked Plant on the Basis of an Uncertainty Hyperobserver. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2014, vol. 48, no. 3, pp. 129–143.
22. Utkin V.I. *Sliding Modes in Optimization and Control Problems*. New York, Springer Verlag, 1992. 420 p.
23. Drazenovic B. The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, 1969, vol. 5, no. 3, pp. 287–295.
24. Rustamov G.A. Absolutely robust control systems. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2013, vol. 47, no. 5, pp. 227–241.
25. Andreev V.V., Sapozhnikov Yu.V., Fomichev A.I. Determinirovanny khaos i kodirovaniye informatsii [Deterministic chaos and information coding]. *Prikladnaya informatika – Applied informatics*, 2009, vol. 24, no. 6, pp. 80–87.
26. Lorenz E. Determinirovannoye neperiodicheskoye dvizheniye [Deterministic non-periodic motion]. *Strannyye attraktory. Sbornik statey* [Strange attractors. Collection of articles]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1981. pp. 88–116.

Received: 23 August 2014.