УДК 536.24

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В СТЕРЖНЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООТДАЧИ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Видин Юрий Владимирович,
канд. техн. наук, профессор кафедры теплотехники и гидрогазодинамики
теплоэнергетического факультета Сибирского Федерального Университета,
Россия, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.
E-mail: roman.kazakov@list.ru

Казаков Роман Владимирович,
канд. техн. наук, ассистент кафедры теплотехники и гидрогазодинамики
теплоэнергетического факультета Сибирского Федерального Университета,
Россия, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.
E-mail: roman.kazakov@list.ru

Аналитические методы, применяемые для изучения процессов теплообмена в ребристых поверхностях, основаны на предположении, что коэффициент теплоотдачи является постоянной величиной. Однако в реальных условиях этот коэффициент оказывается, как правило, переменным, что, в частности, обусловлено изменением температурного напора по длине ребра. Предложен математический метод расчета распределения температуры по длине ребра постоянного поперечного сечения для случая, когда коэффициент теплоотдачи на его поверхности зависит от продольной координаты. Полученное решение задачи основывается на использовании специальных функций Эйри. Благодаря рекомендуемому теоретическому подходу удается устранить одно из широко использовавшихся ранее допущений, а именно, что коэффициент теплоотдачи является постоянной величиной на всей площади ребристой поверхности.

Ключевые слова:
Ребро, коэффициент теплоотдачи, специальные функции Эйри, температурное поле, аналитический метод.

Развитые поверхности теплообмена широко используются в различных областях техники [1], так как благодаря оребрению удается заметно интенсифицировать процессы теплопередачи. При изучении теплопроводности ребер, как правило, используют эффективные аналитические методы расчета изменения температуры по их длине [1]. Математическая постановка таких задач включает в себя значения коэффициентов теплоотдачи, которые обычно принимаются постоянными по всей внешней поверхности системы.

Однако на практике могут иметь место случаи, когда такие коэффициенты существенно зависят от пространственной координаты, рассматриваемого сечения. Это обстоятельство приводит к тому, что изучаемая задача в математическом отношении оказывается намного сложнее.

Проведем исследование подобной задачи на примере переноса тепла вдоль стержня постоянного поперечного сечения, которая может быть записана в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{d^2t}{dx^2}-\frac{\alpha(x)P}{\lambda f}(t-t_c)=0, \quad (1)$$

$$t=t_0, \text{ при } x=0, \quad (2)$$

$$\frac{dt}{dx}=0, \text{ при } x=l_0. \quad (3)$$

Здесь $t=t(x)$ – искомое распределение температуры в ребре длиной l; t_0, t_c – температура основания ребра и окружающей среды соответственно, °C; P, f – периметр и площадь поперечного сечения стержня, м, м^2; λ – коэффициент теплопроводности материала стержня, Вт/(мК); $\alpha=f(x)$ – коэффициент теплоотдачи от поверхности ребра в окружающую среду, Вт/(м^{2}К), который в общем случае зависит от продольной координаты x.

С математической точки зрения целесообразно представить систему (1)–(3) в безразмерном виде. Если ввести безразмерные величины $v=\frac{t-t_c}{t_0-t_c}$, $X=\frac{x}{l}$, $m^2=\frac{\alpha_0 P}{\lambda f}l^2$, $\varphi(x)=\frac{\alpha(x)}{a_0}$, a_0 – некоторая фиксированная величина, то (1)–(3) преобразуется к виду

$$\frac{d^2v}{dX^2}-\varphi(X)m^2v=0, \quad (4)$$

$$v=1 \text{ при } X=0, \quad (5)$$

$$\frac{dv}{dX}=0 \text{ при } X=1, \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда функция φ имеет линейный вид

$$\varphi(x)=1+\alpha X,$$

где коэффициент $\alpha\neq 0$, но $\alpha>-1$.

Если $\alpha=0$, то аналитическое решение системы (4)–(6) выражается через элементарные гиперболические функции [1]. Однако при $\alpha\neq 0$ эта задача существенно усложняется.

Введем новую переменную

$$Z=(1+\alpha X)\sqrt[3]{M^2},$$

где параметр M равен

$$M=\frac{m}{\alpha}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (4) преобразуется к виду

$$\frac{d^2v}{dZ^2}-Zv=0, \qquad (7)$$

а граничные условия (5) и (6) запишутся в форме

$$v=1 \text{ при } Z_0=\sqrt[3]{M^2}, \qquad (8)$$

$$\frac{dv}{dZ}=0 \text{ при } Z_1=(1+\alpha X)\sqrt[3]{M^2}. \qquad (9)$$

Зависимость (7) относится к классу уравнений Эйри (Джон Биддель Эйри (1801–1892) – английский математик и астроном) [2–4].

В связи с этим решение уравнения (7) можно представить через две линейно независимые функции $Ai(Z)$ и $Bi(Z)$, т. е.

$$v=AAi(Z)+BBi(Z), \qquad (10)$$

где A и B – постоянные интегрирования. Эти постоянные находим из граничных условий (8) и (9). Подставим (10) в (8) и (9), получим систему из двух алгебраических уравнений

$$AAi(Z_0)+BBi(Z_0)=1,$$

$$AAi'(Z_1)+BBi'(Z_1)=0.$$

Отсюда следует, что

$$A=\frac{Bi'(Z_1)}{Ai(Z_0)Bi'(Z_1)-Ai'(Z_1)Bi(Z_0)}, \qquad (11)$$

$$B=\frac{-Ai'(Z_1)}{Ai(Z_0)Bi'(Z_1)-Ai'(Z_1)Bi(Z_0)}. \qquad (12)$$

С учетом выражений (11) и (12) решение (10) принимает окончательный вид

$$v=\frac{Bi'(Z_1)Ai(Z)-Ai'(Z_1)Bi(Z)}{Ai(Z_0)Bi'(Z_1)-Ai'(Z_1)Bi(Z_0)}. \qquad (13)$$

Обозначения функций Эйри $Ai(Z)$ и $Bi(Z)$ и их производных взяты из справочника [2]. В работе [3] под подобными функциями подразумеваются несколько иные выражения. Так, согласно [2]

$$Ai(Z)=C_1f(Z)-C_2g(Z),$$

$$Bi(Z)=\sqrt{3}[C_1f(Z)+C_2g(Z)],$$

где

$$f(Z)=1+\frac{1}{3!}Z^3+\frac{1\cdot 4}{6!}Z^6+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}Z^9+\ldots=$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}3^K\left(\frac{1}{3}\right)_K\frac{Z^{3K}}{(3K)!},$$

$$g(Z)=Z+\frac{2}{4!}Z^4+\frac{2\cdot 5}{7!}Z^7+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}Z^{10}+\ldots=$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}3^K\left(\frac{2}{3}\right)_K\frac{Z^{3K+1}}{(3K+1)!},$$

$$C_1=0{,}355028,$$

$$C_2=0{,}2588194.$$

В монографии [3] за функции Эйри приняты степенные ряды $f(-Z)$ и $-g(Z)$.

Проведение инженерных расчетов по формуле (13) не представляет никаких сложностей, так как в [2] и [3] приведены подробные таблицы указанных функций и их производных.

На основе выражения (13) можно легко рассчитать температуру вершины ребра, т. е. когда $X=1$ или $Z=(1+a)\sqrt[3]{M^2}$, которая представляет наибольший теплотехнический интерес. Подставляя в (18) , получим

$$v(Z_1)=\frac{Ai(Z_1)Bi'(Z_1)-Ai'(Z_1)Bi(Z_1)}{Ai(Z_0)Bi'(Z_1)-Ai'(Z_1)Bi(Z_0)}. \qquad (14)$$

Однако, учитывая, что числитель зависимости (14) равен постоянной величине, а именно

$$N=Ai(Z_1)Bi'(Z_1)-Ai'(Z_1)Bi(Z_1)=0{,}31831,$$

решение (14) можно записать в более простой форме

$$v(Z_1)=\frac{N}{Ai(Z_0)Bi'(Z_1)-Ai'(Z_1)Bi(Z_0)}. \qquad (15)$$

В качестве примера определим безразмерную температуру на конце ребра для трех случаев $\alpha=0{,}5$; $\alpha=0$; $\alpha=-0{,}5$.

Во всех трех вариантах примем $m=0{,}5$.

В случае $\alpha=0$ безразмерная температура вершины ребра определяется согласно [1] по простой зависимости

$$v(X=1)=\frac{1}{\operatorname{ch}m}=\frac{1}{\operatorname{ch}0{,}5}=0{,}8868. \qquad (16)$$

При $\alpha=0{,}5$ имеем $Z_0=\sqrt[3]{M^2}=1$ и $Z_1=(1+\alpha)\sqrt[3]{M^2}=1{,}5$
и следовательно тогда

$$v(X=1)=\frac{0{,}3183}{Ai(1)Bi'(1{,}5)-Ai'(1{,}5)Bi(1)}=0{,}8539.$$

Если же $\alpha=-0{,}5$, то получим $Z_0=1$ и $Z_1=(1+\alpha)\sqrt[3]{M^2}=0{,}5$.

Поэтому

$$v(X=1)=\frac{0{,}3183}{Ai(1)Bi'(0{,}5)-Ai'(0{,}5)Bi(1)}=0{,}922.$$

Из сравнения полученных результатов видно, что чем интенсивнее снижается коэффициент теплоотдачи по длине теплоотдающего ребра, тем выше становится безразмерная температура его вершины. В результате повышения величины α по длине стержня будет иметь место обратный эффект.

При условии, когда $\alpha\Rightarrow 0$ (т. е. коэффициент теплоотдачи по всей ребристой поверхности остается одинаковым), формула (15) преобразуется в выражение (16).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Керн Д., Краус А. Развитые поверхности теплообмена. – М.: Энергия, 1977. – 461 с.
2. Абрамович М., Стигин И. Справочник по математическим функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
3. Смирнов А.Д. Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 261 с.
4. Фок В.А. Таблицы функций Эйри. – М.: Изд-во информ. отдела НИИ, 1946. – 54 с.

Поступила 20.08.2013 г.

UDC 536.24

CALCULATION OF HEAT DISTRIBUTION IN ROD WITH VARIABLE HEAT IRRADIATION COEFFICIENT ON ITS SURFACE

Yuri V. Vidin,
Cand. Sc., Siberian Federal University, Russia, 660041, Krasnoyarsk,
Svobodny avenue, 79. E-mail: roman.kazakov@list.ru

Roman V. Kazakov,
Cand. Sc., Siberian Federal University, Russia, 660041, Krasnoyarsk,
Svobodny avenue, 79. E-mail: roman.kazakov@list.ru

The analytical methods used for researching heat exchange processes in ribbed surfaces are based on assumption, that heat exchange coefficient is constant. But in real conditions this coefficient is variable, because of changes in thermal field along the rib. The authors have proposed the mathematical method for calculating heat distribution along the rib with constant cross-section for case, when heat transfer coefficient on rib surface depends on longitudinal coordinate. The solution obtained is based on special Airy function. When using the recommended theoretical method the authors eliminated the assumption, that heat transfer coefficient is constant on whole ribbed surface.

Key words:
Rib, heat convection coefficient, Airy function, temperature field, analytical approach.

REFERENCES

1. Kern D., Kraus A. *Razvitye poverkhnosti teploobmena* [The developed heat exchange surfaces]. Moscow, Energiya Publ., 1977. 461 p.
2. Abramovich M., Stigin I. *Spravochnik po matematicheskim funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami* [Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables]. Moscow, Nauka, 1979. 830 p.
3. Smirnov A.D. *Tablitsy funktsii Eyri i spetsialnykh vyrozhdennykh gipergeometricheskikh funktsiy dlya asimptoticheskikh resheniy differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka* [Tables of Airy functions and special confluent hypergeometric functions for asymptotic solutions of second order differential equations]. Moscow, AN SSSR publ., 1955. 261 p.
4. Fok V.A. *Tablitsy funktsiy Eyri* [Tables of Airy functions]. Moscow, Informatsionny otdea NII, 1946. 54 p.