

- poroshkovoy naplavki na formiruemyu strukturu pokrytiy sistemy Fe-Cr-V-Mo-C [Influence of technological parameters of plasma powder hard-facing on the formed structure of coverings of Fe-Cr-V-Mo-C system]. *Welding and diagnostics*, 2011, no. 4, pp. 13–20.
19. Degterov A.S., Gnyusov S.F. Vliyaniye tekhnologicheskikh parametrov plazmennoy poroshkovoy naplavki na formiruemyu strukturu pokrytiy sistemy Fe-Cr-V-Mo-C [Influence of technological parameters of plasma powder hard-facing with direct polarity current on the formed structure of Fe-Cr-V-Mo-C coating]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 320, no. 2, pp. 87–94.
 20. Degterov A.S., Kirilkin M.S., Isakin I.A., Gnyusov S.F. Iznos pokrytiy na osnove sistemy Fe-Cr-V-Mo-C [Wear of coating on the basis of Fe-Cr-V-Mo-C system]. *Siberian Journal of Science*, 2012, no. 4 (5), pp. 118–123. Available at: <http://sjs.tpu.ru/journal/article/viewPDFInterstitial/432/372> (accessed 25 June 2013).
 21. Geller Yu.A. *Instrumentalnye stali* [Tool steels]. Moscow, Metallurgy, 1983. 527 p.
 22. Chernyavskiy K.S. *Stereologiya v materialovedenii* [Stereometry in materials technology]. Moscow, Metallurgy, 1977. 280 p.
 23. Nefedyev S.P. *Osobennosti struktury i svoystva poverkhnostnykh sloev uglerodistykh staley s plazmennym uprochneniem i naplavkoy kompleksno-legirovannym belym chugunom*. Avtoreferat Dis. kand. nauk [Features of structure and property of blankets of carbonaceous steels with plasma hardening and cladding with complex-alloyed white pig-iron. Cand. Diss.]. Magnitogorsk, 2012. 18 p.
 24. Livshits L.S., Khakimov A.N. *Metallovedenie svarki i termicheskaya obrabotka svarnykh soedineniy* [Metallurgical science of welding and thermal processing of welded connections]. Moscow, Mechanical engineering, 1989. 336 p.

УДК 62–752+62–755

УРАВНОВЕШИВАНИЕ АВТОБАЛАНСИРОМ РОТОРА В УПРУГО-ВЯЗКО ЗАКРЕПЛЕННОМ КОРПУСЕ С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Филимонихин Геннадий Борисович,

д-р техн. наук, профессор кафедры деталей машин и прикладной механики
Кировоградского национального технического университета,
Украина, 25006, г. Кировоград, пр. Университетский, 8.
E-mail: filimonikhin@narod.ru, fgb@online.ua

Гончаров Валерий Владимирович,

канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики
Кировоградского национального технического университета, Украина,
25006, г. Кировоград, пр. Университетский, 8. E-mail: matkora@yandex.ru

Изучается процесс уравнивания автобалансиrom статически неуравновешенного ротора, помещенного с возможностью вращения в тяжелый упруго-вязко закрепленный корпус с неподвижной точкой. Предложенная методика исследований может быть стандартной при решении подобных задач и включает следующие этапы:

- составление упрощенных дифференциальных уравнений движения роторной системы, линеаризованных как по введенному малому параметру, так и по отклонениям системы от установившегося движения;
- составление замкнутой системы дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат, определяющих движение ротора, его дисбаланс;
- проведение уравнений к безразмерному виду, их комплексное сворачивание и приведение к стационарному виду;
- составление характеристического уравнения и исследование его корней.

В результате исследований установлено, что: принципиально возможно уравновесить ротор, только если условный составной ротор (образованный ротором и корпусом) длинный; при этом ротор имеет одну критическую скорость, и автобалансировка наступает при ее превышении; в процессе наступления автобалансировки сначала прекращаются быстрые движения корректирующих грузов относительно ротора, а потом они медленно движутся относительно ротора к автобалансировочному положению.

Ключевые слова:

Ротор, дисбаланс, автобалансиrom, основное движение, устойчивость движения.

Введение

Роторы многих центробежных машин – стиральных, экстракторов, сепараторов, центрифуг, осевых вентиляторов и пр. – установлены в корпусе с возможностью вращения, а уже корпус закреплен упруго-вязко и совершает неплоское движение. В этих машинах дисбаланс ротора меняется в

процессе выполнения технологических операций, поэтому его целесообразно уравнивать на ходу пассивными автобалансирами (АБ) [1].

Наиболее полный обзор литературы по пассивной автобалансировке роторов приведен в [1]. Учет этого обзора и последних публикаций показывает, что на сегодня мало работ, в которых аналитиче-

ски исследуется автобалансировка ротора, совершающего неплоские движения [1–9]. При этом в них рассматриваются роторы, непосредственно установленные на опоры, и теоретически определяются только условия наступления автобалансировки, а переходные процессы не исследуются.

В данной работе изучается автобалансировка шаровым или роликовым АБ статически неуравновешенного ротора, помещенного с возможностью вращения в тяжелый упруго-вязко закрепленный корпус с неподвижной точкой. По предложенной методике [1, 9], которая может быть стандартной при исследовании роторных машин с осесимметричными опорами, определены условия наступления автобалансировки и оценены переходные процессы.

Описание теоретико-механической модели ротора и автобалансира

Ротор массы m_r установлен в корпус массы m_c с возможностью поворота вокруг собственной продольной оси, являющейся его главной центральной осью инерции (рис. 1). Ротор вращается относительно корпуса с постоянной угловой скоростью ω . Корпус удерживают опоры: шарнирная – в точке O , благодаря которой ротор имеет неподвижную точку O на продольной оси, и две упруго-вязкие, которые в недеформированном состоянии перпендикулярны продольной оси ротора и действуют в перпендикулярных направлениях.

Для описания движения системы используем три тройки правых ортогональных осей (рис. 1). Неподвижные оси $Oxyz$ введены для положения статического равновесия роторной системы так, что ось Oz направлена вдоль продольной оси ротора, оси Ox, Oy направлены параллельно направлениям упруго-вязких опор. Подвижные оси $Ouvw$ жестко связаны с корпусом, а $O\xi\eta\zeta$ – с ротором. В исходном положении роторной системы оси всех

трех систем совпадают (рис. 1, а).

Относительно осей $Ouvw$ тензоры инерции ротора и корпуса имеют вид

$$\mathbf{J}_r = \text{Diag}(A_r, A_r, C_r), \quad \mathbf{J}_c = \text{Diag}(A_c, A_c, C_c).$$

Упруго-вязкие опоры с коэффициентами жесткости k_x, k_y и вязкости b_x, b_y имеют радиус-векторы точек приложения в проекциях на оси $Oxyz$ (рис. 1, а)

$$\mathbf{r}_{B_1} = (-x_B, 0, z_B)^T, \quad \mathbf{r}_{B_2} = (0, x_B, z_B)^T.$$

В плоскости $P_0(\zeta=d_0)$ на расстоянии r_0 от продольной оси ротора находится точечная масса m_0 , образующая статический дисбаланс s_0 . Не ограничивая общности, считаем, что в начальный момент времени вектор s_0 направлен параллельно оси $O\xi$. В плоскости $P(\zeta=d)$, близкой к плоскости P_0 , установлен АБ с n одинаковыми корректирующими грузами (КГ) – шарами или роликами массы m . КГ в АБ катятся без скольжения по кольцевой дорожке, при этом расстояние от продольной оси ротора до центра шара или продольной оси ролика равно r . Как это принято в теории пассивных АБ [1–9], пренебрегаем действием сил тяжести на систему и считаем, что: радиус КГ намного меньше радиуса их беговой дорожки; КГ не препятствуют движению друг друга.

Модель движения ротора и корпуса приведена на рис. 1. Вначале происходят повороты корпуса с ротором вокруг точки O на углы Резаля α, β (рис. 1, б), при этом оси $Oxyz$ переходят в оси $Ouvw$, задающие текущее положение корпуса. Потом ротор поворачивается вокруг продольной оси $Ow=Oz$ на угол $\gamma=\omega t$ (рис. 1, в), вследствие чего оси $Ouvw$ переходят в оси $O\xi\eta\zeta$, задающие текущее положение ротора.

Положение массы дисбаланса или i -го КГ в плоскостях соответственно P_0 и P определяются абсолютными $\varphi_i, i=0, n/$ (рис. 2, а) или относительными

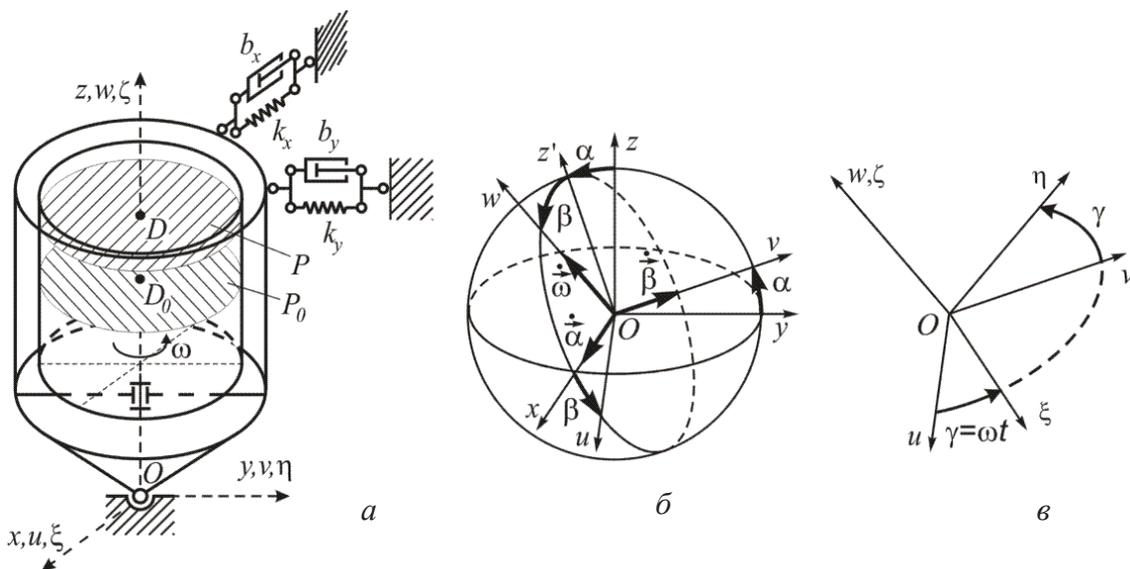


Рис. 1. Кинематика движения ротора и корпуса

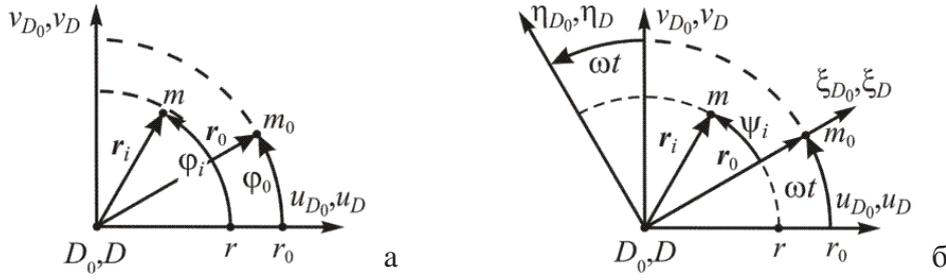


Рис. 2. Углы, задающие положения массы дисбаланса и КГ относительно ротора

ми ψ_i , $/i=\overline{0,n}/$ (рис. 2, а) углами, отсчитываемыми соответственно между осью $D_0 u_{D_0} (D u_D)$ или $D_0 \xi_{D_0} (D \xi_D)$ и относительным радиус-вектором r_i массы дисбаланса ($i=0$) или центров масс КГ ($i=\overline{0,n}$). Абсолютные и относительные углы связаны соотношениями

$$\varphi_i = \omega t + \psi_i, \quad /i = \overline{0,n}/, \quad \varphi_0 = \omega t, \quad \psi_0 = 0. \quad (1)$$

При движении i -го КГ по дорожке на него действует сила вязкого сопротивления $br(\omega - \dot{\varphi}_i)$, где b – коэффициент силы вязкого сопротивления, и $r(\omega - \dot{\varphi}_i)$ – скорость движения центра масс i -го КГ относительно ротора.

Составление упрощенных дифференциальных уравнений движения роторной системы в неподвижной системе координат

Упрощенные дифференциальные уравнения движения системы составляются по методике, предложенной в работе [9], с использованием уравнений Лагранжа II рода

$$d(\partial T / \partial \dot{q}) / dt - \partial T / \partial q = -\partial \Pi / \partial q - \partial \Phi / \partial q, \quad (2)$$

$$q = (\alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T,$$

где T и Π – соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы, Φ – диссипативная функция Релея; q – вектор обобщенных координат, определяющих движение системы. Упрощающие предположения касаются отношений малости величин [9]:

$$|\alpha|, |\beta|, |x|, |y|, |z| \ll 1; \quad |\dot{\alpha}|, |\dot{\beta}|, |\dot{x}|, |\dot{y}|, |\dot{z}| \ll 1;$$

$$mn \ll m_r, m_c \sim 1.$$

Кинетическая энергия системы равна $T = T_r + T_c + \sum_{i=0}^n T_i$, где T_r – кинетическая энергия ротора, T_c – массивного корпуса, T_i – массы дисбаланса или i -го КГ.

Кинетическая энергия ротора и корпуса равна кинетической энергии вращательного движения этих тел вокруг неподвижной точки O :

$$T_r = \omega_r^T J \omega_r / 2; \quad T_c = \omega_c^T J \omega_c / 2.$$

где $\omega_r \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega + \dot{\alpha}\beta)^T$, $\omega_c \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}\beta)^T$ – угловые скорости вращения, соответственно, ротора и корпуса в проекциях на подвижные оси $Ouvw$ с точностью до величин 2-го порядка малости включительно. Тогда с этой же точностью

$$T_r \approx [A_r(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + C_r(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}\beta)] / 2,$$

$$T_c \approx A_c(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) / 2.$$

Кинетическая энергия i -го КГ определяется как сумма кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и вращательного движения вокруг центра масс $T_i = T_i^{(tr)} + T_i^{(rot)}$, $/i = \overline{0,n}/$.

Кинетическая энергия массы дисбаланса и поступательного движения i -го КГ соответственно равна

$$T_0^{(tr)} = m_0 v_0^2 / 2, \quad T_i^{(tr)} = m v_i^2 / 2, \quad /i = \overline{1,n}/, \quad (3)$$

где $v_i = \omega \times \rho_i$, $/i = \overline{0,n}/$ – вектор скорости массы дисбаланса или центра масс КГ; $\rho_0 \approx (r_0 \cos \varphi_0, r_0 \sin \varphi_0, d_0)^T$, $\rho_i \approx (r \cos \varphi_i, r \sin \varphi_i, d)^T$, $/i = \overline{0,n}/$ – радиус-векторы соответственно массы дисбаланса и центра масс КГ в системе $Ouvw$; $\omega \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega + \dot{\alpha}\beta)^T$ – вектор угловой скорости вращения вектора ρ_i вокруг точки O в системе $Ouvw$.

С точностью до величин 1-го порядка малости включительно

$$v_0 \approx \begin{pmatrix} \dot{\beta} d_0 - \dot{\varphi}_0 r_0 \sin \varphi_0; \\ -\dot{\alpha} d_0 + \dot{\varphi}_0 r_0 \cos \varphi_0; \\ \dot{\alpha} r_0 \sin \varphi_0 - \dot{\beta} r_0 \cos \varphi_0 \end{pmatrix}^T,$$

$$v_i \approx \begin{pmatrix} \dot{\beta} d - \dot{\varphi}_i r \sin \varphi_i; \\ -\dot{\alpha} d + \dot{\varphi}_i r \cos \varphi_i; \\ \dot{\alpha} r \sin \varphi_i - \dot{\beta} r \cos \varphi_i \end{pmatrix}^T, \quad /i = \overline{1,n}/. \quad (4)$$

Из (3), (4) с точностью до величин 2-го порядка малости включительно получим

$$T_0^{(tr)} \approx m_0 r_0 \dot{\varphi}_0 [\dot{\varphi}_0 r_0 - 2d_0(\dot{\alpha} \cos \varphi_0 + \dot{\beta} \sin \varphi_0)] / 2,$$

$$T_i^{(tr)} \approx m r \dot{\varphi}_i [\dot{\varphi}_i r - 2d(\dot{\alpha} \cos \varphi_i + \dot{\beta} \sin \varphi_i)] / 2,$$

$$/i = \overline{1,n}/.$$

Кинетическая энергия вращательного движения i -го КГ с точностью до величин 2-го порядка малости включительно равна $T_i^{(rot)} \approx \kappa^{(rot)} m r^2 \dot{\varphi}_i^2 / 2$, $/i = \overline{0,n}/$, где $\kappa^{(rot)} = 2/5$ – для шаров и $\kappa^{(rot)} = 1/2$ – для цилиндрических роликов.

Введем обобщенные координаты S_u, S_v , определяющие проекции суммарного дисбаланса точечной массы и КГ на оси Ou, Ov соответственно

$$s_u = d_0/d \cdot m_0 r_0 \cos \varphi_0 + m r \sum_{i=1}^n \cos \varphi_i,$$

$$s_v = d_0/d \cdot m_0 r_0 \sin \varphi_0 + m r \sum_{i=1}^n \sin \varphi_i. \quad (5)$$

Тогда кинетическая энергия системы с точностью до величин 2-го порядка малости включительно примет вид

$$T \approx [A\dot{\alpha}^2 + A\dot{\beta}^2 + C_r(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}\beta)]/2 - d(\dot{\alpha}\dot{s}_v - \dot{\beta}\dot{s}_u) + (m_0r_0^2\dot{\varphi}_0^2 + \kappa mr^2 \sum_{i=1}^n \dot{\varphi}_i^2)/2, \quad (6)$$

где $A=A_r+A_s$, $\kappa=1+\kappa^{(rot)}$, $/i=\overline{0,n}/$.

Потенциальная энергия, накопленная двумя опорами с точностью до величин 2-го порядка малости включительно равна:

$$П \approx (k_\alpha \alpha^2 + k_\beta \beta^2)/2, \quad k_\alpha = k_y z_B^2, \quad k_\beta = k_x z_B^2. \quad (7)$$

Диссипативная функция Релея $\Phi=\Phi_c+\sum_{i=1}^n \Phi_i$, где $\Phi_c \approx (b_\alpha \dot{\alpha}^2 + b_\beta \dot{\beta}^2)/2$ – составляющая корпуса (для упруго-вязких опор – с точностью до величин второго порядка малости включительно), $b_\alpha = b_y z_B^2$, $b_\beta = b_x z_B^2$; $\Phi_i = br^2(\dot{\varphi}_i - \omega)^2/2$, $/i=\overline{0,n}/$ – составляющая i -го КГ. Тогда с рассматриваемой точностью

$$\Phi \approx [b_\alpha \dot{\alpha}^2 + b_\beta \dot{\beta}^2 + br^2 \sum_{i=1}^n (\dot{\varphi}_i - \omega)^2]/2. \quad (8)$$

Подставив (6)–(8) в (2), получим в случае изотропных упруго-вязких опор ($k_\beta=k_\alpha$, $b_\beta=b_\alpha$) систему $(2+n)$ обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно обобщенных координат α, β, φ_i , $/i=\overline{0,n}/$:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + \omega C_r \dot{\beta} + b_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha - d\ddot{s}_v &= 0, \\ A\ddot{\beta} - \omega C_r \dot{\alpha} + b_\alpha \dot{\beta} + k_\alpha \beta + d\ddot{s}_u &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} mr\kappa\dot{\varphi}_i + br(\dot{\varphi}_i - \omega) &= md(\ddot{\alpha} \cos \varphi_i + \ddot{\beta} \sin \varphi_i), \\ /i &= \overline{1,n}/. \end{aligned} \quad (10)$$

Основные движения системы и дифференциальные уравнения для исследования их устойчивости

На основных движениях ротор уравновешен и вращается вокруг собственной продольной оси, поэтому:

$$\alpha = \beta = 0, \quad s_u = s_v = 0. \quad (11)$$

Устойчивость основных движений можно исследовать по этим обобщенным координатам. Но система уравнений (9) незамкнута. К ней нужно добавить минимальное количество уравнений, являющихся комбинациями соответствующих дифференциальных уравнений движения КГ.

Замкнутая система дифференциальных уравнений

Умножим каждое уравнение в (10) поочередно на $\sin \varphi_i$ и сложим, затем – на $\cos \varphi_i$ и сложим. Полученные уравнения в окрестности определенного установившегося движения линеаризуются и с учетом (1), (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \kappa(\ddot{s}_u + 2\omega\dot{s}_v - \omega^2 s_u) + b(\dot{s}_u + \omega s_v)/m &= \\ = -mnd \left[\begin{aligned} &\ddot{\alpha}(p_1 \sin 2\omega t + p_2 \cos 2\omega t) + \\ &+ \ddot{\beta}(1 - p_1 \cos 2\omega t + p_2 \sin 2\omega t) \end{aligned} \right] / 2, \\ \kappa(\ddot{s}_v - 2\omega\dot{s}_u - \omega^2 s_v) + b(\dot{s}_v - \omega s_u)/m &= \\ = mnd \left[\begin{aligned} &\ddot{\alpha}(1 + p_1 \cos 2\omega t - p_2 \sin 2\omega t) + \\ &+ \ddot{\beta}(p_1 \sin 2\omega t + p_2 \cos 2\omega t) \end{aligned} \right] / 2, \end{aligned} \quad (12)$$

где $p_1 = (\sum_{i=1}^n \cos 2\tilde{\psi}_i)/n$, $p_2 = (\sum_{i=1}^n \sin 2\tilde{\psi}_i)/n$, $\tilde{\psi}_i$, $/i=\overline{0,n}/$ – угловое положение i -го КГ в установленном движении.

Введем угол ϑ и параметр p :

$$\cos \vartheta = p_1 / p, \quad \sin \vartheta = p_2 / p, \quad p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2},$$

и сдвинем время: $2\omega t + \vartheta = 2\omega \tilde{t}$ или $t = \tilde{t} - \vartheta/(2\omega)$. Тогда уравнения (12) примут вид

$$\begin{aligned} \kappa(\ddot{s}_u + 2\omega\dot{s}_v - \omega^2 s_u) + b(\dot{s}_u + \omega s_v)/m &= \\ = -mnd [\ddot{\alpha} p \sin 2\omega \tilde{t} + \ddot{\beta}(1 - p \cos 2\omega \tilde{t})] / 2, \\ \kappa(\ddot{s}_v - 2\omega\dot{s}_u - \omega^2 s_v) + b(\dot{s}_v - \omega s_u)/m &= \\ = mnd [\ddot{\alpha}(1 + p \cos 2\omega \tilde{t}) + \ddot{\beta} p \sin 2\omega \tilde{t}] / 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (9) не изменятся при переходе к новому времени, поэтому уравнения (13) замыкают их относительно неизвестных функций α, β, s_u, s_v . Уравнения (9), (13) – это система линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами. В нее входит 11 параметров $\omega, d, m, n, \kappa, A, C_r, b_\alpha, b, p, k_\alpha$.

Приведение уравнений к безразмерному и комплексному виду, переход к подвижной системе координат

Уравнения в безразмерном виде. Введем безразмерные обобщенные координаты и выделим минимальное количество независимых безразмерных параметров, полностью описывающих динамику системы.

Сделаем следующие преобразования системы (9), (13):

а) введем безразмерные время \tilde{t} и обобщенные координаты $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{s}_u, \tilde{s}_v$:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \omega_0 \tilde{t}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha / l_\alpha, \quad \tilde{\beta} = \beta / l_\alpha, \\ \tilde{s}_u &= s_u / l_s, \quad \tilde{s}_v = s_v / l_s, \end{aligned} \quad (14)$$

где ω_0, l_α, l_s – масштабные коэффициенты;

б) поделим первые два уравнения на $A\omega_0^2 l_\alpha$, а последние два – на $\kappa\omega_0^2 l_s$;

в) введем безразмерные параметры $\tilde{\omega}, \tilde{C}, \tilde{b}_\alpha, \tilde{b}, \tilde{m}$, и коэффициенты l_α, l_s, ω_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tilde{C} = \frac{C_r}{A}, \quad \tilde{b}_\alpha = \frac{b_\alpha}{A\omega_0}, \quad \tilde{b} = \frac{b}{\kappa m \omega_0}, \\ \tilde{m} &= \frac{mnd^2}{2\kappa A}, \quad \tilde{m} \ll 1, \quad l_\alpha = \frac{l_s d}{A}, \quad l_s = mr, \quad \omega_0 = z_B \sqrt{\frac{k_x}{A}}. \end{aligned}$$

Получим уравнения движения в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'' + \tilde{b}_\alpha \tilde{\alpha}' + \tilde{\alpha} + \tilde{\omega} \tilde{C} \tilde{\beta}' - \tilde{s}_v'' &= 0, \\ \tilde{\beta}'' + \tilde{b}_\alpha \tilde{\beta}' + \tilde{\beta} - \tilde{\omega} \tilde{C} \tilde{\alpha}' + \tilde{s}_u'' &= 0, \\ \tilde{s}_u'' + 2\tilde{\omega} \tilde{s}_v' - \tilde{\omega}^2 \tilde{s}_u + \tilde{b}(\tilde{s}_u' + \tilde{\omega} \tilde{s}_v) &= \\ = -\tilde{m} [\tilde{\alpha}'' p \sin 2\tilde{\omega} \tilde{t} + \tilde{\beta}'' (1 - p \cos 2\tilde{\omega} \tilde{t})], \\ \tilde{s}_v'' + 2\tilde{\omega} \tilde{s}_u' - \tilde{\omega}^2 \tilde{s}_v + \tilde{b}(\tilde{s}_v' + \tilde{\omega} \tilde{s}_u) &= \\ = \tilde{m} [\tilde{\alpha}'' (1 + p \cos 2\tilde{\omega} \tilde{t}) + \tilde{\beta}'' p \sin 2\tilde{\omega} \tilde{t}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, динамику системы описывают 5 безразмерных координат (4 зависимые – $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, \tilde{s}_u , \tilde{s}_v и одна независимая – $\tilde{\tau}$) и 6 независимых безразмерных параметров $\tilde{\omega}$, \tilde{m} , \tilde{C} , \tilde{b}_α , \tilde{b} , p .

Уравнения в комплексном виде. В комплексных переменных (после комплексного псевдосворачивания) уравнения принимают вид двух пар комплексно-сопряженных уравнений, и в каждое из них входит меньшее число переменных.

Умножим четные уравнения системы (15) на мнимую единицу i , после чего прибавим и отнимем их от соответствующих нечетных уравнений, получим:

$$L_1 = \alpha'_z + \tilde{b}_\alpha \alpha'_z + \alpha_z - i\tilde{\omega}\tilde{C}\alpha'_z + s'_{zu}i = 0, \quad \bar{L}_1 = 0, \quad (16)$$

$$L_2 = s''_{zu} - 2\tilde{\omega}is'_{zu} - \tilde{\omega}^2s_{zu} + \tilde{b}(s'_{zu} - \tilde{\omega}is_{zu}) - \tilde{m}(\alpha'_z + \tilde{\alpha}'_z pe^{2i\tilde{\omega}\tilde{\tau}})i, \quad \bar{L}_2 = 0, \quad (17)$$

где $\alpha_z = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}i$, $s_{zu} = \tilde{s}_u + \tilde{s}_v i$.

Дифференциальные уравнения движения роторной системы в подвижной системе координат – приведение уравнений к стационарному виду.

Введем в рассмотрение еще одну подвижную систему координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, полученную при повороте системы $Ouvw$ вокруг оси Ow на угол $\omega\tau = \omega t + \vartheta/2$, и новые угловые переменные δ_1, θ_1 : $\alpha = \delta_1 \cos \omega\tau - \theta_1 \sin \omega\tau$, $\beta = \delta_1 \sin \omega\tau + \theta_1 \cos \omega\tau$. Выпишем связь между соответствующими переменными в системах координат $Ouvw$, $O\xi\eta\zeta$, $O\xi_1\eta_1\zeta_1$:

$$\alpha_z = \delta_z e^{i\omega\tau}, \quad s_{zu} = s_z e^{i\omega\tau}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_z &= \tilde{\delta}_1 + \tilde{\theta}_1 i, \quad \tilde{\delta}_1 = \delta_1 / l_\alpha, \quad \tilde{\theta}_1 = \theta_1 / l_\alpha, \\ s_z &= \tilde{s}_{\xi_1} + \tilde{s}_{\eta_1} i, \quad \tilde{s}_{\xi_1} = s_{\xi_1} / l_s, \quad \tilde{s}_{\eta_1} = s_{\eta_1} / l_s, \\ \tilde{s}_{\xi_1} &= \tilde{s}_0 \cos(\vartheta/2) + \sum_{i=1}^n \cos(\psi_i - \vartheta/2), \\ \tilde{s}_{\eta_1} &= \tilde{s}_0 \sin(\vartheta/2) + \sum_{i=1}^n \sin(\psi_i - \vartheta/2), \end{aligned} \quad (19)$$

$\tilde{s}_0 = m_0 r_0 d_0 / (mrd)$ – безразмерный статичный дисбаланс.

Подставив (18) в уравнения (16), (17) получаем:

$$L_1 = \delta'_z + [\tilde{b}_\alpha + (2 - \tilde{C})\tilde{\omega}i]\delta'_z + (a_{11} + a_{12}i)\delta_z + (s'_z + 2\tilde{\omega}is'_z - \tilde{\omega}^2s_z)i = 0, \quad \bar{L}_1 = 0, \quad (20)$$

$$L_2 = s''_z + \tilde{b}s'_z - \tilde{m}(a_z - \tilde{\alpha}_z p) = 0, \quad \bar{L}_2 = 0, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} a_z &= (\delta'_z + 2\tilde{\omega}i\delta'_z - \tilde{\omega}^2\delta_z)i, \\ a_{11} &= 1 + (\tilde{C} - 1)\tilde{\omega}^2, \quad a_{12} = \tilde{b}_\alpha \tilde{\omega}. \end{aligned}$$

С (11), (14), (18), (19) следует, что на основных движениях обобщенные комплексные координаты δ_z , $\tilde{\delta}_z$, s_z , \tilde{s}_z в подвижной системе координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ равны 0:

$$\delta_z = \tilde{\delta}_z = 0, \quad s_z = \tilde{s}_z = 0.$$

Уравнения (20), (21) стационарны, поэтому устойчивость основных движений роторной системы можно исследовать по обобщенным координатам δ_z , $\tilde{\delta}_z$, s_z , \tilde{s}_z с применением теории устойчивости стационарных решений линейных автономных дифференциальных уравнений.

Оценка величин безразмерных параметров

$\tilde{\omega}, \tilde{m}, \tilde{C}, \tilde{b}_\alpha, \tilde{b}, p$

Параметр $\tilde{\omega}$ соответствует угловой скорости вращения ротора и теоретически может меняться в пределах от 0 до $+\infty$. Нужно определить такие области изменения $\tilde{\omega}$, в пределах которых будут устойчивыми основные движения.

Для реальных роторных машин масса КГ намного меньше массы ротора с корпусом, поэтому $\tilde{m} \ll 1$. В соответствии с уравнениями (20) корпус и ротор как бы образуют составной ротор с осевыми моментами инерции $A = A_c + A_r$, $C = C_r$, вычисленными относительно осей, проходящих через неподвижную точку. Этот ротор в зависимости от величины параметра \tilde{C} : $\tilde{C} < 1$ – длинный; $\tilde{C} \approx 1$ – сферический; $\tilde{C} > 1$ – короткий. Поскольку $\tilde{C} = C_r / (A_c + A_r)$, то при массивном корпусе составной ротор будет длинным, даже если сам ротор короткий. Поэтому будем считать, что $\tilde{C} \approx 1$. В реальных роторных машинах силы сопротивления обеспечивают затухание переходных процессов, поэтому будем считать, что $\tilde{b}_\alpha, \tilde{b} \sim 1$.

Так как

$$1 - p^2 = (2/n^2) \sum_{i,j=1}^n \sin^2(\tilde{\psi}_i - \tilde{\psi}_j) \geq 0, \quad (22)$$

то при произвольном изменении дисбаланса и количества КГ параметр p принимает значения в пределах от 0 до 1. Случай $p=1$ является критическим, так как разность уравнений (21) при этом дает уравнение

$$s'_z + \tilde{s}'_z + \tilde{b}(s'_z + \tilde{s}'_z) = 0,$$

и, следовательно, характеристическое уравнение имеет один нулевой корень. Из (22) следует, что равенство $p=1$ выполняется только в случае

$$\tilde{\psi}_i = \tilde{\psi} + \sigma_i \pi, \quad \sigma_i = \{0, 1\} / i = \overline{1, n}, \quad (23)$$

где $\tilde{\psi} \in [0, \pi)$ – некоторый фиксированный угол. В реальном АБ количество КГ всегда больше двух. Поэтому равенство (23) не выполняется, так как КГ мешают друг другу занимать положение на прямой, проходящей через центр АБ.

Окончательно имеем такие оценки величин безразмерных параметров:

$$\tilde{\omega} \in (0, +\infty), \quad \tilde{m} \ll 1, \quad \tilde{C}, \tilde{b}_\alpha, \tilde{b} \sim 1, \quad p \in [0, 1).$$

Исследование устойчивости основных движений и характера переходных процессов

Запишем характеристическое уравнение системы (20), (21) в виде

$$X\bar{X} - \tilde{m}(X\bar{Y} + \bar{X}Y) + (1 - p^2)\tilde{m}^2 Y\bar{Y} = 0, \quad (24)$$

где

$$X = \lambda(\lambda + \tilde{b}) \begin{bmatrix} (\lambda + \tilde{\omega}i)^2 + \\ + \tilde{b}_\alpha(\lambda + \tilde{\omega}i) + 1 - \\ - \tilde{C}(\tilde{\omega}i + \lambda)\tilde{\omega}i \end{bmatrix}, \quad Y = (\lambda + \tilde{\omega}i)^4.$$

Нулевое приближение. В нулевом приближении ($\tilde{m}=0$) корни уравнения (24) равны

$$\lambda_i = 0, \quad / i = 1, 2/, \quad \lambda_i = -\tilde{b}, \quad / i = 3, 4/,$$

$$\lambda_{\bar{5},6} = -\left(\tilde{b}_\alpha \pm \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} - x) / 2}\right) / 2 -$$

$$-i\left(\tilde{\omega}(2 - \tilde{C}) \mp \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} + x) / 2}\right) / 2, \quad \lambda_{\bar{7},8} = \bar{\lambda}_{\bar{5},6},$$

где

$$x = 4 + \tilde{C}^2\tilde{\omega}^2 - \tilde{b}_\alpha^2, \quad y = 2\tilde{b}_\alpha\tilde{\omega}\tilde{C}.$$

Корни $\lambda_{\bar{3},8}$ имеют отрицательную действительную часть, поэтому соответствующие им частные решения асимптотически устойчивы при любых $\tilde{\omega}$. Они определяют быстрые переходные процессы, при которых КГ замедляют движение относительно ротора и устанавливается движение ротора, соответствующее суммарному дисбалансу от массы дисбаланса и КГ. Скорость протекания этих переходных процессов зависит от условий закрепления ротора, его массо-инерционных характеристик, скорости вращения, сил вязкого сопротивления, действующих на КГ, и не зависит от уравновешиваемого дисбаланса, положения плоскости движения КГ, количества КГ и их текущих положений. Поэтому возможна отдельная оптимизация указанных параметров с целью скорейшего наступления автобалансировки.

Первое приближение. Для окончательного определения условий асимптотической устойчивости основных движений необходимо найти в первом приближении корни $\lambda_{1,2}$. Подставляя $\lambda_{1,2} = \tilde{m}\lambda_{1,2}^{(1)}$ в уравнение (24) с точностью до малых второго порядка малости включительно относительно \tilde{m} , получим

$$(a_{11}^2 + a_{12}^2)\tilde{b}^2(\lambda_{1,2}^{(1)})^2 - 2\tilde{b}\tilde{\omega}^4 a_{11}\lambda_{1,2}^{(1)} + \tilde{\omega}^8 \Sigma = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) будет иметь корни с отрицательными действительными частями тогда и только тогда, когда $a_{11} = 1 + (\tilde{C} - 1)\tilde{\omega}^2 < 0$ или в размерном виде

$$\omega > z_B \sqrt{k_x / (A_c + A_r - C_r)}, \quad A_c + A_r > C_r.$$

Таким образом, ротор можно уравновесить, только если составной ротор, образованный ротором и корпусом, вытянутый ($A_c + A_r > C_r$).

Из уравнения (25) находим нулевые корни в первом приближении

$$\lambda_{1,2} = \tilde{m}[a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 - (a_{11}^2 + a_{12}^2)\Sigma}] \tilde{\omega}^4 / [\tilde{b}(a_{11}^2 + a_{12}^2)].$$

Корни $\lambda_{1,2}$ соответствуют медленным переходным процессам – реакции КГ на движение ротора, установившееся в нулевом приближении. КГ медленно стремятся к автобалансировочному положению. При чрезмерном количестве КГ существует семья установившихся движений, и КГ стремятся к одному из движений этой семьи. Скорость протекания этих переходных процессов зависит уже и от уравновешиваемого дисбаланса, положения плоскости движения КГ и их текущих положений.

Выводы

1. Принципиально возможно уравновесить ротор, только если $A_c + A_r > C_r$ – составной ротор (образованный ротором и корпусом), вытянутый.
2. При этом ротор имеет одну критическую скорость $\omega_1^* = z_B \sqrt{k_x / (A_c + A_r > C_r)}$ и автобалансировка наступает при ее превышении.
3. Переходные процессы, характеризующие наступление автобалансировки, делятся на: быстрые, при которых прекращаются быстрые движения КГ относительно ротора и устанавливается устойчивое движение ротора, соответствующее текущему суммарному дисбалансу; медленные, при которых КГ приходят в автобалансировочное положение, медленно двигаясь относительно ротора.

Работа выполнена в соответствии с госбюджетной темой Министерства образования и науки Украины № 0105U001506, период выполнения 2012–2014 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
2. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84 с.
3. Нестеренко В.П. Теория и практика устройств автоматической балансировки роторов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Новосибирск, 1990. – 34 с.
4. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plane automatic balancing // Machine Dynamics Problems. – 2001. – V. 25. – № 3/4. – P. 139–152.
5. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plane Auto-Balancing of Rigid Rotors // Technische Mechanik. – 2004. – V. 24. – № 1. – P. 1–24.
6. Automatic two-plane balancing for rigid rotors / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International

Journal of Non-Linear Mechanics. – 2008. – V. 43. – Iss. 6. – P. 527–541.

7. Two-plane automatic balancing: A symmetry breaking analysis / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – V. 46. – Iss. 9. – P. 1139–1154.
8. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2009. – V. 23. – Iss. 3. – P. 884–896.
9. Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобалансир // Збірник наукових праць КНТУ. – 2009. – Вип. 22. – С. 357–363.

Поступила 10.07.2013 г.

BALANCING OF ROTOR IN VISCO-ELASTIC FIXED CASING WITH FIXED POINT USING AUTO-BALANCER

Gennadiy B. Filimonikhin,

Dr. Sc., Kirovograd National Technical University, Ukraine, 25006, Kirovograd,
University avenue, 8. E-mail: filimonikhin@narod.ru, fgb@online.ua

Valery V. Goncharov,

Cand. Sc., Kirovograd National Technical University,
Ukraine, 25006, Kirovograd, University avenue, 8. E-mail: matkora@yandex.ru

The authors have studied the process of balancing statically unbalanced rotor placed in visco-elastic fixed casing with fixed point by auto-balancer. The proposed research methodology may be standard in solving similar problems and includes the following stages:

- derivation of simplified differential equations of motion of rotor's system linearized by the entered small parameter and by the system deviations from steady motion;
- obtaining of closed system of differential equations for generalized coordinates defining rotor motion and its unbalance;
- transformation of the equations to the dimensionless form, their complex folding and reduction to stationary form;
- obtaining of characteristic equation and studying its roots.

The results of the research are: it's possible to balance rotor only if a conditional composite rotor (formed by rotor and casing) is long; in this case rotor has only one critical speed and auto-balancing occurs on its exceeding; at auto-balancing at first the fast motions of corrective weights stop relative to the rotor and then they move slowly relative to the rotor to auto-balancing positions.

Key words:

Rotor, unbalance, auto-balancer, main motion, stability of motion.

REFERENCES

1. Filimonikhin G.B. *Balancing and vibration protection rotors avtobalansyramy solid corrective weights* [Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами]. Kirovograd, KNTU Publ., 2004. 352 p.
2. Nesterenko V.P. *Avtomaticheskaya balansirovka rotorov priborov i mashin so mnogimi stepenyami svobody* [Automatic rotor balancing devices and machines with many degrees of freedom]. Tomsk, Tomsk University Publ., 1985. 84 p.
3. Nesterenko V.P. *Teoriya i praktika ustroystv avtomaticheskoy balansirovki rotorov*. Avtoreferat diss. dokt. tekhnicheskikh nauk [Theory and practice of automatic rotor balancing devices. Abstract of Dr. diss.]. Novosibirsk, 1990. 34 p.
4. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plane automatic balancing. *Machine Dynamics Problems*, 2001, vol. 25, no. 3/4, pp. 139–152.
5. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plane Auto-Balancing of Rigid Rotors. *Technische Mechanik*, 2004, vol. 24, no. 1, pp. 1–24.
6. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, pp. 527–541.
7. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Two-plane automatic balancing: a symmetry breaking analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 1139–1154.
8. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, vol. 23, pp. 884–896.
9. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Method of differential equations of motion of rotor systems avtobalansyramy and its application to rotor systems – a massive building – avtobalansyr [Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобалансир]. *Zbirnyk naukovykh prac KNTU*, 2009, Iss. 22, pp. 357–363.