

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО Q_m И ПРОЕКТИВНОГО P_n ПРОСТРАНСТВ ($m > n$)

Ивлев Евгений Тихонович,

канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: iet@tpu.ru

Аль-Хассани Мудхар Аббас,

преподаватель кафедры математики Университета Басры, Ирак;
аспирант кафедры высшей математики Физико-технического института ТПУ
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: mudhar73@mail.ru

Лучинин Анатолий Алексеевич,

канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: luchinin@tpu.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью детального изучения дифференцируемых отображений многомерных пространств.

Цель работы. Изучить дифференцируемые отображения $V_{m,n}$ аффинного пространства Q_m на проективное пространство P_n ($m > n$). Рассмотрение отображений провести не только аналитическими методами, но и геометрически с помощью присоединенных геометрических образов.

Методы исследования. Основным методом исследования является метод внешних форм Картана в локальной дифференциальной геометрии и теоретико-групповой метод Г.Ф. Лаптева. Эти методы предполагают локальное изучение рассматриваемых объектов и использование функций класса C^∞ .

Результаты. Получены дифференциальные уравнения внутренних фундаментальных геометрических объектов первого и второго порядков дифференцируемых отображений пространства Q_m в многообразия вырожденных и невырожденных нуль-пар пространства P_n . Найдены аналитически и геометрически инвариантные геометрические образы, определяемые компонентами фундаментального объекта, с помощью которых решена задача об инвариантном определении отображения пространства Q_m в многообразия нуль-пар пространства P_n .

Ключевые слова:

Дифференцируемое отображение, многомерные аффинные и проективные пространства.

1. Аналитический аппарат

1.1. Рассматривается m -мерное аффинное пространство Q_m и n -мерное эквипроективное пространство P_n , отнесенные к подвижному аффинному реперу Q и подвижному эквипроективному реперу P с соответствующими деривационными формулами и структурными уравнениями

$$Q_m : Q = \{\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a\}, \quad d\bar{B} = \theta^a \bar{\varepsilon}_a, \quad d\bar{\varepsilon}_a = \theta_a^b \bar{\varepsilon}_b, \\ D\theta^a = \theta^b \wedge \theta_b^a, \quad D\theta_a^b = \theta_a^c \wedge \theta_c^b. \quad (a, b, c = \overline{1, m}); \quad (1)$$

$$P_n : P = \{\bar{A}_i\}, \quad d\bar{A}_i = \omega_i^j \bar{A}_j, \quad D\omega_i^j = \omega_i^K \wedge \omega_K^j, \\ \omega_K^K = 0, \quad (I, J, K = \overline{0, n}). \quad (2)$$

Предполагается, что между пространствами Q_m и P_n существует сюръективное дифференцируемое отображение

$$V_{m,n} : Q_m \rightarrow P_n, \quad (m > n).$$

1.2. Дифференциальные уравнения этого отображения с учетом (1) и (2) запишутся в виде:

$$\omega_0^i = A_a^i \theta^a, \quad (i, j, k = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Двукратные продолжения [1–3] этой системы дифференциальных уравнений с учетом (1) и (2) при-

водят к дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют компоненты внутренних фундаментальных геометрических объектов [4, 5] $\Gamma_1 = \{A_a^i\}$ (первого порядка) и $\Gamma_2 = \{A_a^i, A_{ab}^i\}$ (второго порядка):

$$dA_a^i + A_a^j \Omega_j^i - A_b^i \theta_a^b = A_{ab}^i \theta^b, \\ \Omega_j^i = \omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0, \quad A_{[ab]}^i = 0; \\ dA_{ab}^i + A_{ab}^j \Omega_j^i - A_{cb}^i \theta_a^c - A_{ac}^i \theta_b^c - \\ - (A_a^i A_b^j + A_b^i A_a^j) \omega_j^0 = A_{abc}^i \theta^c, \\ A_{[abc]}^i = 0, \quad (a, b, c = \overline{1, m}; \quad i, j, k = \overline{1, n}). \quad (4)$$

1.3. Заметим в соответствии с [3], что геометрически отображение (3) каждое направление $u = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_a) n^a \in Q_m$ переводит в направление $x = (A_0, A_i) x^i : V_{m,n} u = x$, где

$$x^i = A_a^i u^a. \quad (5)$$

Отсюда следует, что совокупность всех направлений $u \in Q_m$ в точке $B \in Q_m$, которые принадлежат ядру сюръективного отображения (3), поскольку $m > n$, образуют $(m-n)$ -мерное подпространство $\Gamma_{m-n} \subset Q_m$, проходящее через точку B . Это подпространство определяется системой n линейных однородных уравнений с m неизвестными ($m > n$)

$$\begin{aligned} A_{\alpha}^i u^{\alpha} + A_{\alpha}^i \hat{u}^{\alpha} &= 0, \\ (\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, n}; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{n+1, m}). \end{aligned} \quad (6)$$

Проведем в точке $B \in Q_m$ такую канонизацию аффинного репера Q аффинного пространства Q_m , при которой

$$A_{\alpha}^i = 0, \quad \det[A_{\alpha}^i] \neq 0. \quad (7)$$

Из дифференциальных уравнений (3)–(5) с учетом (7) получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_0^i &= A_{\alpha}^i \theta^{\alpha}, \quad dA_{\alpha}^i + A_{\alpha}^j \Omega_j^i - A_{\beta}^i \theta_{\alpha}^{\beta} = A_{\alpha a}^i \theta^a, \\ \theta_{\alpha}^{\alpha} &= B_{\alpha a}^{\alpha} \theta^a, \\ dB_{\alpha a}^{\alpha} + B_{\alpha a}^{\beta} \theta_{\beta}^{\alpha} - B_{\beta a}^{\alpha} \theta_{\alpha}^{\beta} - B_{\alpha \beta}^{\alpha} \theta_a^{\beta} &= B_{\alpha ab}^{\alpha} \theta^b, \\ B_{\alpha a}^{\alpha} &= -A_{\alpha a}^i B_i^{\alpha}, \quad B_{\alpha ab}^{\alpha} = -A_{\alpha ab}^i B_i^{\alpha} - A_{\alpha a}^i B_{ib}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь в силу (7) величины B_i^{α} определяются по формулам

$$B_i^{\alpha} A_{\alpha}^j = \delta_i^j, \quad B_i^{\alpha} A_{\beta}^j = \delta_{\beta}^{\alpha}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dB_i^{\alpha} + B_i^{\beta} \theta_{\beta}^{\alpha} - B_j^{\alpha} \Omega_i^j = \hat{B}_{ib}^{\alpha} \theta^b, \quad \hat{B}_{ib}^{\alpha} = -A_{ib}^j B_j^{\alpha} B_i^{\beta}.$$

В соответствии с [6] дифференциальные уравнения (8) свидетельствуют о существовании канонизации аффинного репера Q типа (7). Геометрически с учетом (6) эта канонизация означает, что

$$\Gamma_{m-n} = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_{n+1}, \dots, \bar{\varepsilon}_m). \quad (9)$$

В каждой точке $B \in Q_m$, при этом из рассмотрения исключается случай $\det[A_{\alpha}^i] = 0$ ($i, \alpha = \overline{1, n}$), когда размерность ядра Γ_{m-n} отображения (3) больше $m-n$.

Замечание 1.1. Из (5) с учетом (6), (7) и (9) заключаем, что каждая $(n-m+1)$ -плоскость

$$\Gamma_{n-m+1}(u) = (\Gamma_{n-m}, \bar{\varepsilon}_{\alpha}) u^{\alpha} \subset Q_m \quad (9')$$

при отображении $V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n$ переходит в направление

$$x = (\bar{A}_0, \bar{A}_i) x^i \in P_n, \quad x^i = A_{\alpha}^i u^{\alpha}. \quad (9'')$$

2. Поле гиперконусов $K_{n-1}^{m-n} \subset P_n$ класса $m-n$

2.1. В соответствии с [7] из (1), (8) и (9) замечаем, что в аффинном пространстве Q_m определено распределение

$$\Delta_{m,m-n}: B \rightarrow \Gamma_{m-n} \quad (10)$$

интегральные кривые которого, описываемые точкой $B \in Q_m$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\theta^{\alpha} = 0. \quad (11)$$

Поскольку в силу (4) и (8) величины $B_{\alpha\beta}^{\alpha}$ симметричны по нижним индексам, т. е.

$$B_{[\alpha\beta]}^{\alpha} = 0,$$

то с учетом (11) заключаем, что распределение (10) является голономным или инволютивным в смысле [7] (см. также [8]).

2.2. Точке $B \in Q_m$ сопоставим в пространстве P_n гиперплоскость $L_{n-1} \subset A_0$, определяемую в терминах проективного репера P уравнением

$$L_{n-1}(x) \Leftrightarrow x_i x^i = 0. \quad (12)$$

Воспользуемся далее условиями инвариантности геометрических образов аффинного пространства и учтем (1), (7)–(12). Тогда получаем, что совокупность всех направлений, касательных к интегральным кривым распределения $\Delta_{m,n-1}$ в точке $B \in Q_m$, вдоль которых Γ_{m-n} и бесконечно близкая к ней первого порядка Γ_{m-n}^* при отображении $V_{m,n}$ принадлежат гиперплоскости $L_{n-1} \subset P_n$, образует $(m-n-1)$ -мерный конус $Q_{m-n-1}^2(x) \subset \Gamma_{m-n}$ второго порядка с вершиной B . Этот конус в терминах аффинного репера Q определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} Q_{m-n-1}^2(x) \Leftrightarrow x_i A_{\alpha\beta}^i u^{\alpha} u^{\beta} &= 0, \quad u^{\alpha} = 0, \\ (\alpha = \overline{1, n}; \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{n+1, m}). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, каждой гиперплоскости $L_{n-1} \subset P_n$, соответствующей точке $B \in Q_m$, в $(m-n)$ -плоскости $\Gamma_{m-n} \subset Q_m$ отвечает конус $Q_{m-n-1}^2(x)$. Рассмотрим множество $\{L_{n-1}(x)\}$ всех гиперплоскостей $L_{n-1}(x) \subset P_n$, которым отвечают в Γ_{m-n} вырожденные конусы $Q_{m-n-1}^2(x)$, т. е. конусы по крайней мере с прямолинейными вершинами, проходящими через точку A_0 . Из (13) следует, что множество $\{L_{n-1}(x)\}$ определяется уравнением:

$$\det[x_i A_{\alpha\beta}^i] = 0. \quad (14)$$

Отсюда следует, что множество $\{L_{n-1}(x)\}$ указанного типа в точке $B \in Q_m$ является гиперконусом $K_{n-1}^{m-n} \subset P_n$ класса $m-n$ с вершиной $A_0 \in P_n$, который в тангенциальных координатах проективного репера P определяется уравнением:

$$\Psi^{i_1 i_2 \dots i_{m-n}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{m-n}} = 0. \quad (15)$$

Здесь симметрические величины $\Psi^{i_1 i_2 \dots i_{m-n}}$ определяются по формулам

$$\Psi^{i_1 i_2 \dots i_{m-n}} = \frac{1}{(m-n)!} A_{m-n+1, [m-n+1}^{(i_1} A_{m-n+2, [m-n+2}^{i_2} \dots A_{m, m]}^{i_{m-n}}). \quad (16)$$

Причем как обычно символы $()$ и $[\]$ означают симметрирование и альтернирование по соответствующим индексам. Заметим, что каждой гиперплоскости $L_{n-1}(x) \in K_{n-1}^{m-n} \subset P_n$ в $(m-n)$ -плоскости $\Gamma_{m-n} \supset Q_m$ отвечает прямая, проходящая через точку $B \in Q_m$ и являющаяся вершиной K_{n-1}^{m-n} , которая определяется с учетом (13) системой линейных однородных уравнений

$$x_i A_{\alpha\beta}^i u^{\alpha} = 0, \quad (x_i \text{ фиксированы}),$$

с условием (14).

Из дифференциальных уравнений (5) получаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины $\Psi^{i_1 i_2 \dots i_{m-n}}$:

$$\begin{aligned} d\Psi^{i_1 i_2 \dots i_{m-n}} + \Psi^{i_1 i_2 \dots i_{m-n}} \Omega_i^{i_1} + \dots + \\ + \Psi^{i_1 i_2 \dots i_{m-n}} \Omega_i^{i_{m-n}} + \Psi^{i_1 i_2 \dots i_{m-n-1} i} \Omega_i^{i_{m-n-1}} = \Psi_a^{i_1 i_2 \dots i_{m-n}} \theta^a, \\ (i_1, i_2, \dots, i_{m-n}, i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь явный вид величин, стоящих при θ^a , для нас несущественный.

Замечание 2.1. По аналогии с [1, (38)] и [9] и с учетом (16) будем считать, что числа m и n удовлетворяют неравенствам, при которых определяется гиперконус (15):

$$m - n > 2, n \leq \frac{(m - n)(m - n + 3)}{2}. \quad (18)$$

3. Инвариантная линейная n -сеть пространства P_n

3.1. Каждой точке $B \in Q_m$ в проективном пространстве P_n сопоставим n линейно независимых направлений в точке $A_0 \in P_n$:

$$x_i = (\bar{A}_0, \bar{A}_j) x_i^j; \quad \det[x_i^j] \neq 0, \quad (i, j = \overline{1, n}). \quad (19)$$

По аналогии с пунктом 2 система $\Psi(x)$ направлений (19) называется основной относительно гиперконуса $K_{n-1}^{m-n} \subset P_n$, отвечающего точке $B \in Q_m$, если каждое направление $x_i \in \Psi(x)$ является линейным полюсом (полюсом порядка $n-1$) [9] соответствующей гиперплоскости $G_{i, n-1}$ ($i \neq j$), проходящей через все остальные направления этой системы. Из (15) и (16) по аналогии с [1] заключаем, что система $\Psi(x)$ будет основной относительно гиперконуса K_{n-1}^{m-n} в точке $B \in Q_m$ ($m > n$) тогда и только тогда, когда n^2 величин x_i^j удовлетворяют следующей системе $n(n-1)$ алгебраических уравнений

$$\Psi^{i_1 i_2 \dots i_{m-n}} x_{i_1}^j x_{i_2}^j \dots x_{i_{m-n-1}}^j x_{i_{m-n}}^k = 0, \quad (i_1, \dots, i_{m-n}, j, k = \overline{1, n}; j \neq k). \quad (20)$$

Как и в случае [9], показывается, что в общем случае система (20) имеет конечное число решений относительно x_i^j .

3.2. Проведем в пространстве P_n такую канонизацию проективного репера P , при которой

$$\Psi^{i_1 \dots i_j} \begin{cases} = 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases}, \quad \Lambda \Psi =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \dots & \Psi_{1, n-1} & \Psi_{1n} \\ \Psi_2^2 & \Psi_2 & \Psi_{23} & \dots & \Psi_{2, n-1}^2 & \Psi_{2n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{n1}^n & \Psi_{n2}^n & \Psi_{n3}^n & \dots & \Psi_{n, n-1}^n & \Psi_n \end{bmatrix} \neq 0. \quad (21)$$

Здесь $\Psi_i = [\Psi_{i \dots i}^{m-n-2}]$ ($i \neq j, k$; i фиксировано), а

матрица $\Psi_{ij}^k = [A_{i \dots i}^{m-n-2}]$ состоит из одного ненулевого элемента, принадлежащего строке с номером j и столбцу с номером k ($i, j, k = \overline{1, n}$).

Из (20) и (19) следует, что в каждой точке $B \in Q_m$ канонизация проективного репера P типа (21) означает, что каждая прямая

$$L_1^j = (\bar{A}_0, \bar{A}_j) \quad (22)$$

является основной прямой, т. е. принадлежит основной системе $\Psi(x)$ направлений относительно

гиперконуса $K_{n-1}^{m-n} \subset P_n$. При этом из рассмотрения исключается случай $\Psi = 0$, когда основная система $\Psi(x)$ содержит бесчисленное множество основных направлений относительно K_{n-1}^{m-n} .

Из (16), (17) и (21) получаются с учетом (2) в каждой точке $B \in Q_m$ следующие дифференциальные уравнения:

$$\omega_i^j = A_{ia}^j \theta^a, \quad dA_{ia}^j + A_{ia}^k \omega_k^j - A_{ka}^j \omega_i^k - A_{ib}^j \theta^b = A_{iab}^j \theta^b, \quad (i, j, k = \overline{1, n}; a, b = \overline{1, m}; i \neq j \neq k). \quad (23)$$

Здесь явный вид величин A_{iab}^j ($i \neq j$) для нас несущественный. Заметим в соответствии с [6] и с учетом (23), что канонизация проективного репера типа (21) существует в общем случае в каждой точке $B \in Q_m$.

3.3. В соответствии с [10] с учетом (22) заключаем, что в проективном пространстве P_n в каждой точке $B \in Q_m$ определена инвариантным образом линейная n -сеть из прямых L_1^j , проходящих через соответствующую при отображении $V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n$ точку $A_0 \in P_n$.

Каждой точке $B \in Q_m$ в проективном пространстве P_n сопоставим основную прямую L_1^i и соответствующую ей гиперплоскость L_{n-1}^i , проходящую через все остальные основные прямые L_1^j :

$$L_1^i = (\bar{A}_0, \bar{A}_i), \quad L_{n-1}^i = (\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{i-1}, \bar{A}_{i+1}, \dots, \bar{A}_n). \quad (24)$$

В точке $B \in Q_m$ проведем такую канонизацию аффинного репера Q в пространстве Q_m , при которой

$$A_\alpha^i \begin{cases} = 0, & i \neq \alpha \\ \neq 0, & i = \alpha \end{cases}; \quad A_1^1 \neq A_2^2 \neq \dots \neq A_n^n \neq 0. \quad (25)$$

Из дифференциальных уравнений (8) в точке $B \in Q_m$ получаются с учетом (23) и (1) дифференциальные уравнения

$$\omega_0^i = A_i^i \theta^i, \quad \theta_\alpha^\beta = B_{\alpha\alpha}^\beta \theta^\alpha, \quad dB_{\alpha\alpha}^\beta - B_{\alpha\gamma}^\gamma \theta_\gamma^\alpha + B_{\gamma\alpha}^\gamma \theta_\gamma^\alpha - B_{\alpha\alpha}^\beta \theta_\alpha^\beta = B_{\alpha\alpha}^\beta \theta^\alpha, \quad (i = \overline{1, n}, \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, n}, a, b = \overline{1, m}; \alpha \neq \beta, \text{ по } i \text{ не суммировать}). \quad (26)$$

Здесь явный вид величин $B_{\alpha\alpha}^\beta$ ($\alpha \neq \beta$) для нас несущественный. Дифференциальные уравнения (26) в соответствии с [9] свидетельствуют о существовании канонизации репера Q типа (26). Геометрически с учетом (24), (8), (9') и (9'') эта канонизация означает, что каждая $(n-m+1)$ -плоскость

$$\Gamma_{m-n+1}^\alpha = (\Gamma_{m-n}, \bar{\varepsilon}_\alpha), \quad (\alpha = \overline{1, n}) \quad (27)$$

является прообразом соответствующей прямой $L_1^\alpha = (\bar{A}_0, \bar{A}_\alpha)$ ($\alpha = \overline{1, n}$) пространства при отображении $V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n$. Поэтому гиперплоскость

$$\Gamma_{m-1}^\alpha = (\bar{B}, \bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_{\alpha-1}, \bar{\varepsilon}_{\alpha+1}, \dots, \bar{\varepsilon}_n, \bar{\varepsilon}_{n+1}, \dots, \bar{\varepsilon}_m) \subset Q_m, \quad (28)$$

в силу (24) проходящая через Γ_{m-n} , является прообразом соответствующей гиперплоскости $L_{n-1}^\alpha \subset P_n$ при отображении $V_{m,n}$. Заметим, что $\Gamma_{m-n+1}^\alpha \not\subset \Gamma_{m-1}^\alpha$.

В соответствии с [7] и с учетом (28) заключаем, что в аффинном пространстве Q_m определено гиперраспределение

$$\Delta_{m, m-1}^\alpha: B \rightarrow \Gamma_{m-1}^\alpha, \quad (\alpha \text{ фиксировано}). \quad (29)$$

Из (1) и (2) с учетом (27) и (25) заключаем, что интегральные кривые распределения (29) определяются дифференциальными уравнениями:

$$\theta^{\bar{\alpha}} = \theta^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \omega_0^i = 0, \quad (\alpha=i \text{ фиксировано}). \quad (30)$$

Точке $B \in Q_m$ на прямой $L_i = (\bar{A}_0, \bar{A}_i)$ сопоставим при каждом фиксированном $i=\alpha$ точку

$$\bar{Y}_i = \bar{A}_0 + t_i \bar{A}_i, \quad (i=\alpha \text{ фиксировано}). \quad (31)$$

Из (30) с учетом (23), (24), (29), (31), (1) и (2) заключаем, что каждая точка $\bar{Y}_i$ является фокусом прямой $A_0 Y_i$ в смысле [11] вдоль фокальных интегральных кривых соответствующего распределения $\Delta_{m,m-1}$ (при $\alpha=i$) тогда и только тогда, когда

$$(A_{\bar{a}}^{\bar{j}} + t_i A_{\bar{a}}^{\bar{j}}) \theta^{\bar{a}} = 0, \quad (\bar{j}, \bar{a} \neq i; \bar{j}, \bar{a}, i = \overline{1, n}). \quad (32)$$

Эта система имеет нетривиальные решения относительно $\theta^{\bar{a}}$ тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном i имеем:

$$\det[A_{\bar{a}}^{\bar{j}} + t_i A_{\bar{a}}^{\bar{j}}] = 0. \quad (33)$$

Отсюда следует, что на прямой $A_0 Y_i$ имеется в общем случае $(n-1)$ фокусов Y_i с соответствующими фокальными направлениями, определяемыми в силу (33) из системы (32). Заметим с учетом (33) в соответствии с [10], что точка

$$G_i = A_{\bar{j}}^{\bar{j}} \bar{A}_0 - A_{\bar{j}}^{\bar{j}} \bar{A}_i, \quad (i, \bar{j} = \overline{1, n}; i \neq \bar{j}, \text{ по } \bar{j} \text{ суммировать})$$

является гармоническим полюсом точки A_0 относительно фокусов Y_j ($j \neq i$) соответствующей прямой $A_0 A_i$. Из (33) следует, что каждой точке $B \in Q_m$ в про-

странстве P_n отвечает гиперплоскость $L_{n-1} \in G_i$, определяемая уравнением:

$$L_{n-1} \Leftrightarrow x^0 + g_i x^i = 0, \quad g_i = A_{\bar{j}}^{\bar{j}} (A_{\bar{j}}^{\bar{j}})^{-1}, \quad (i, \bar{j} = \overline{1, n}; i \neq \bar{j}, \text{ по } \bar{j} \text{ суммировать}). \quad (34)$$

Заметим, что в общем случае $A_0 \notin L_{n-1}$.

3.4. Таким образом, с учетом (3), (18), (24) и (35) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. С отображением $V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n$ при m и n , удовлетворяющих неравенствам

$$m > n, m - n > 2, n \leq \frac{(m-n)(m-n+1)}{2},$$

инвариантным образом ассоциируются отображения

$$f_{m,i}^{2n-1}: Q_m \rightarrow M_i^{2n-1} = \{A_0; L_{n-1}^i\}, \quad A_0 \in L_{n-1}^i,$$

$$f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M^{2n} = \{A_0; L_{n-1}\}, \quad A_0 \notin L_{n-1}.$$

Здесь M_i^{2n-1} – многообразия вырожденных нульпар, а M^{2n} – многообразие невырожденных нульпар.

Заключение

В соответствии с [1] и теоремой 3.1 замечаем, что фактически изучение отображения $V_{m,n}: Q_m \rightarrow P_n$ сводится к изучению отображения

$$f_{m,i}^{2n-1}: Q_m \rightarrow M_i^{2n-1} = \{A_0; L_{n-1}^i\}, \quad A_0 \in L_{n-1}^i,$$

$$f_m^{2n}: Q_m \rightarrow M^{2n} = \{A_0; L_{n-1}\}, \quad A_0 \notin L_{n-1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Аль-Хассани М.А., Лучинин А.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространства ($m < n$) // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 16–20.
2. Аль-Хассани М.А., Молдованова Е.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_n и проективного P_n пространства // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 28–32.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М.: ГИТТЛ, 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
5. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды Геометрического Семинара. Т. 6. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1974. – С. 37–42.
6. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – Р. 231–240.

7. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. – 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
8. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображения аффинных и евклидовых пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 8–14.
9. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(L, L_m, L_{m+1})$ в n -мерном проективном пространстве $P_n (m > 2)$ // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.
10. Базылев В.Т. О многомерных сетях и их преобразованиях // Институт научн. информации АН СССР. Итоги науки. – М.: Изд-во ВИНТИ АН СССР, 1963. – С. 139–164.
11. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.

Поступила 08.05.2013 г.

UDC 514.757.2

DIFFERENTIABLE MAPPING OF AFFINE Q_m AND PROJECTIVE P_n SPACES ($m > n$)

Evgeniy T. Ivlev,

Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: iet@tpu.ru

Mudhar Abbas Al-Khassani,

University of Basrah, Iraq; Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: mughar73@yahoo.com

Anatoliy A. Luchinin,

Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: luchinin@tpu.ru

The urgency of work is caused by necessity of detailed studying of differentiable mappings of multivariate space.

The main aim of the research is to study differentiable mappings of $V_{m,n}$ of affine space Q_m to projective space P_n ($m > n$); to consider mapping not only by analytical methods but also geometrically with the help of the attached geometrical images.

Methods of research. The basic method of research is the method of external forms Cartan in local differential geometry and G.F. Lapteva's theoretical-group method. These methods assume local studying of the considered objects and use of functions of a class C^∞ .

Results. The authors have obtained the differential equations of internal fundamental geometrical objects of the first and the second orders of differentiable mappings of space Q_m in manifolds singular and nonsingular null-pairs space P_n . The invariant geometrical images were found analytically and geometrically. The images were determined by the fundamental object components which helped in solving the problem of invariant determining the Q_m space mapping in manifolds of null-pairs of P_n space.

Key words:

Differentiable mapping, multidimensional affine and projective spaces.

REFERENCES

1. Ivlev E.T., Al-Khassani M.A., Luchinin A.A. Differentsiruemo otobrazhenie affinogo Q_m i proektivnogo P_n prostranstv ($m < n$) [Differentiable mapping of affine Q_m and projective P_n spaces ($m < n$)]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 16–20.
2. Al-Khassani M.A., Moldovanova E.A. Differentsiruemo otobrazhenie affinogo Q_m i proektivnogo P_n prostranstv [Differentiable mapping of affine Q_m and projective P_n spaces]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 28–32.
3. Finikov C.P. *Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometrii* [Method of Cartan's external forms in differential geometry]. Moscow, GITTL, 1948. 432 p.
4. Laptev G.F. Differentsialnaya geometriya pogruzhennykh mnogoobraziy [Differential geometry of the immersed manifolds]. *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Proc. of the Moscow mathematical society]. Moscow, GITTL, 1953, no. 2, pp. 275–382.
5. Laptev G.F. K invariantnoy teorii differentsialnykh otobrazheniy [To the invariant theory of differentiable mappings]. *Trudy geometricheskogo seminara* [Proc. of a geometrical seminar]. Moscow, Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR, 1974. Vol. 6, pp. 37–42.
6. Evtushik L.E., Lumiste Yu.G., Ostianu N.M., Shirokov A.P. Differentsialno-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh [Differential-geometrical structure on manifolds]. *Results of a science and engineering. Series: Problems of geometry*, 1979, vol. 9, pp. 3–246.
7. Ivlev E.T., Luchinin A.A. Otobrazhenie affinnykh i evklidovykh prostranstv [Mapping affine and Euclidean spaces]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2010, vol. 317, no. 2, pp. 8–14.
8. Ivlev E.T. O mnogoobraziy $E(L, L_m, L_{m+1})$ v n -mernom proektivnom prostranstve P_n [On manifold in n -dimensional projective space P_n ($m > 2$)]. *Siberian mathematical magazine*, 1967, vol. 8, no. 6, pp. 1307–1320.
9. Ostianu N.M. O kanonizatsii podvizhnogo repera pogruzhennogo mnogoobraziya [On canonization of a mobile reference point of the immersed manifold]. *Rev. math. pures et appl. (RNR)*, 1962, no. 2, pp. 231–240.
10. Bazylev V.T. O mnogomernykh setyakh i ikh preobrazovaniyakh [On multivariate networks and their transformation]. *Institut nauchnoy informatsii AN SSSR. Itogi nauki* [Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR. Science results]. Moscow, 1963. pp. 139–164.
11. Akivis M.A. Fokalne obrazy poverkhnosti ranga r [Focal images of surface of a rank r]. *Bulletin of high schools. Mathematics*, 1957, no. 1, pp. 9–19.