8. Kamenomostskaya S.L. Ob uravneniyakh ellipticheskogo i parabolicheskogo tipa s malym parametrom pri starshikh proizvodnykh [On equations of elliptic and parabolic type with a small parameter in the highest derivatives]. *Mat. sb.*, 1952, no. 31 (73): 3, pp. 703–708.
9. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regulyarnoe vyrozhdenie i pogranichny sloy dlya lineynykh differentsialnykh uravneniy s malym parametrom [Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter]. *UMN* (*Successes of Mathematical Sciences*), 1957, no. 12:5 (77), pp. 3–122.
10. Ilin A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach* [Matching of asymptotic expansions of boundary value problems]. Moscow, Nauka, 1989. 334 p.
11. Alymkulov K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill's Model Equation with the regular Singular Point. *American J. Math. & Statistics*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 53–61.
12. Alymkulov K., Asylbekov T.D., Dolbeeva S.F. Obobshchenie metoda pogranfunktsiy dlya resheniya kraevoy zadachi dlya bisingulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka [Generalization of the boundary functions for solving boundary value problem for Bisingular perturbed second order differential equation]. *Matem. Zametki* (*Mat. Notes*), 2013, vol. 94, no. 3, pp. 483–487.
13. Tursunov D.A. Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya singulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka s dvumya tochkami povorota [Asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed second order differential equation with two turning points]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* (*Bulletin of the Tomsk State University. Mathematics and mechanics*), 2013, no. 1 (21), pp. 34–40.
14. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic partial differential equations of second order]. Moscow, Nauka, 1989. 464 p.

УДК 514.757.2

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ РАНГА *r* АФФИННОГО Q_m И ПРОЕКТИВНОГО P_n ПРОСТРАНСТВ

Аль-Хассани Мудхар Аббас,
преподаватель кафедры математики Университета Басры, Ирак;
аспирант кафедры высшей математики Физико-техническсго института ТПУ
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: mudhar73@mail.ru

Лучинин Анатолий Алексеевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: luchinin@tpu.ru

Актуальность работы вызвана необходимостью дополнительного изучения специального отображения $V^r_{m,n}$ ранга $r<\min(m, n)$ аффинного Q_m и проективного P_n пространств.
***Цель работы**. В предыдущих работах были рассмотрены отображения $V_{m,n}$, когда $r<\min(m, n)$ в случаях $m=n$, $m<n$, $m>n$. В данной работе рассматривается дифференцируемое отображение $V^r_{m,n}$ ранга $r<\min(m, n)$ аффинного пространства Q_m и проективного пространства P_n.*
***Методы исследования**. Основными методами исследования являются метод внешних форм Картана в локальной дифференциальной геометрии и теоретико-групповой метод Г.Ф. Лаптева. Эти методы предполагают локальное изучение рассматриваемого объекта и использование функций класса C^∞.*
***Результаты**. Рассмотрено регулярное отображение ранга r аффинного и проективного пространств. Дана геометрическая характеристика этого отображения. С отображением $V^r_{m,n}$ инвариантно ассоциируется отображение m-мерного пространства в многообразие невырожденных нуль-пар. Доказано (геометрически и методом Кэлера) существование данного отображения. Изучена аналитически и геометрически структура внутреннего фундаментального геометрического объекта.*

***Ключевые слова**:*
Дифференцируемые отображения, многомерные пространства и поверхности, геометрические объекты.

1. Аналитический аппарат

1.1. Как и в [1–3] рассматривается m-мерное аффинное пространство Q_m и n-мерное эквипроективное пространство P_n, отнесенные к подвижному аффинному реперу Q и подвижному эквипроективному реперу P с соответствующими деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$Q_m: \quad Q=\{\bar{B},\bar{\varepsilon}_a\},\ d\bar{B}=\Theta^a\bar{\varepsilon}_a,\ d\bar{\varepsilon}_a=\Theta^b_a\bar{\varepsilon}_b,$$
$$D\Theta^a=\Theta^b\Lambda\Theta^a_b,\ D\Theta^b_a=\Theta^c_a\Lambda\Theta^b_c,\ (a,b,c=\overline{1,m}); \quad (1)$$

$$P_n: P=\{\bar{A}_I\},\ d\bar{A}_I=\omega_I^J\bar{A}_J,\ D\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J,$$
$$\omega_K^K=0,\ (I,J,K=\overline{0,n}). \quad (2)$$

Предполагается, что между пространствами существует дифференцируемое отображение

$$V_{m,n}: Q_m\to P_n. \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения этого отображения с учетом (1) и (2) запишутся в виде

$$\omega_0^i=A_a^i\Theta^a,\ (i,j,k=\overline{1,n}). \quad (4)$$

Двукратное продолжение [4] этой системы дифференциальных уравнений с учетом (1) и (2) приводят к дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют компоненты внутреннего фундаментального геометрического объекта $\Gamma=\{A^i_a, A^i_{ab}\}$ в смысле [5, 6]:

$$dA^i_a + A^j_a\Omega^i_j - A^i_b\Theta^b_a = A^i_{ab}\Theta^b, \Omega^i_j = \omega^i_j - \delta^i_j\,\omega^0_0, A^i_{[ab]}0,$$

$$dA^i_{ab} + A^j_{ab}\Omega^i_j - A^i_{cb}\Theta^c_a - A^i_{ac}\Theta^c_b - (A^i_a A^j_b + A^i_b A^j_a)\omega^0_j =$$

$$= A^i_{abc}\Theta^c, A^i_{[abc]} = 0,$$

$$(a,b,c=\overline{1,m}; i,j,k=\overline{1,n}). \tag{5}$$

Заметим в соответствии с [2, (8)], что отображение (3) направление $\underline{u}=(\underline{\bar{B}},\bar{\varepsilon}_a)\,u^a\in Q_m$ переводит в направление $x=V_{m,n}u=(\bar{A}_0, \bar{A}_i)\,x^i$, где

$$x^i = A^i_a u^a. \tag{6}$$

1.2. В соответствии с [5, 6] система величин A^i_a удовлетворяет дифференциальным уравнениям (4) и (5) и образует фундаментальный геометрический объект $\{A^i_a\}$ первого порядка отображения (3). Эта система величин образует матрицу $[A^i_a]$ ($i=\overline{1,n}$; $a=\overline{1,m}$) размера $n\times m$. Ранг r этой матрицы в общем случае равен $r=\min(n,m)$.

Определение 1.1. Отображение $V^r_{m,n}$: $Q_m\to P_n$ называется регулярным отображением, если ранг r матрицы $[A^i_a]$ равен $r<\min(n, m)$. Если $r<\min(n,m)$, то отображение называется отображением ранга r и обозначается $V^r_{m,n}$.

Заметим, что в статьях [1–3] изучались регулярные отображения $V_{m,n}$.

В данной статье изучаются отображения $V^r_{m,n}$.

Поскольку ранг r матрицы $[A^i_a]$ меньше $\min(n,m)$, то она имеет хотя бы один ненулевой (базисный) минор порядка r. Для определенности таким минором будем считать

$$\det[A^{i_1}_{a_1}] \neq 0, \ (i_1=\overline{1,r}; a_1=\overline{1,r}). \tag{7}$$

Тогда на основании теоремы о базисном миноре получаем, что в каждой точке $B\in Q_m$ имеют место соотношения:

$$A^{i_1}_{\hat{a}_1} = h^{a_1}_{\hat{a}_1}A^{i_1}_{a_1}, A^{\hat{i}_1}_{\hat{a}_1} = h^{a_1}_{\hat{a}_1}A^{\hat{i}_1}_{a_1}; A^{\hat{i}_1}_{a_1} = \overset{*}{h}{}^{\hat{i}_1}_{j_1}A^{j_1}_{a_1}, A^{\hat{i}_1}_{\hat{a}_1} = \overset{*}{h}{}^{\hat{i}_1}_{j_1}A^{j_1}_{\hat{a}_1},$$

$$(a_1,b_1,c_1=\overline{1,r}; \hat{a}_1,\hat{b}_1,\hat{c}_1=\overline{r+1,m};$$

$$i_1,j_1,k_1=\overline{1,r}; \hat{i}_1,\hat{j}_1,\hat{k}_1=\overline{r+1,n}). \tag{8}$$

1.3. В каждой точке $B\in Q_m$ проводится такая канонизация аффинного Q и проективного P реперов, при которой

$$A^{\hat{i}_1}_{a_1}=0, A^{i_1}_{\hat{a}_1}=0 \overset{(5),(6),(7)}{\Longrightarrow} A^{\hat{i}_1}_{\hat{a}_1}=0, h^{a_1}_{\hat{a}_1}=0, \overset{*}{h}{}^{\hat{j}_1}_{j_1}=0, A^{i_1}_{b\hat{a}_1}=0. \tag{9}$$

Из дифференциальных уравнений (5) с учетом (4), (8) и (9) получаются в каждой точке $B\in Q_m$ следующие дифференциальные уравнения:

$$\omega^{i_1}_0 = A^{i_1}_{a_1}\Theta^{a_1}; \omega^{\hat{i}_1}_0 = 0; -A^{i_1}_{a_1}\Theta^{a_1}_{\hat{a}_1} = A^{i_1}_{\hat{a}_1 b}\Theta^b;$$

$$A^{j_1}_{a_1}\omega^{\hat{i}_1}_{j_1} = A^{\hat{i}_1}_{a_1 b_1}\Theta^{b_1};$$

$$dA^{i_1}_{a_1} + A^{j_1}_{a_1}\Omega^{i_1}_{j_1} - A^{i_1}_{b_1}\Theta^{b_1}_{a_1} = A^{i_1}_{a_1 b}\Theta^b;$$

$$A^{\hat{i}_1}_{[a_1 b_1]}=0, A^{i_1}_{[a_1 b]}=0. \tag{10}$$

С учетом (7) в каждой точке $B\in Q_m$ можно ввести в рассмотрение величины $B^{a_1}_{i_1}$ по формулам

$$A^{k_1}_{b_1}B^{a_1}_{k_1} = \delta^{a_1}_{b_1}, A^{k_1}_{b_1}B^{b_1}_{j_1} = \delta^{k_1}_{j_1}, \tag{11}$$

которые в силу (10) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dB^{a_1}_{i_1} + B^{b_1}_{i_1}\Theta^{a_1}_{b_1} - B^{a_1}_{j_1}\Omega^{j_1}_{i_1} = B^{a_1}_{i_1 b}\Theta^b; B^{a_1}_{i_1 b} = -A^{k_1}_{c_1 b}B^{a_1}_{k_1}B^{c_1}_{i_1}. \tag{12}$$

Из (10)–(12) в точке $B\in Q_m$ имеют место следующие дифференциальные уравнения:

$$\Theta^{a_1} = B^{a_1}_{i_1}\Theta^{i_1}, \Theta^{a_1}_{\hat{a}_1} = B^{a_1}_{\hat{a}_1 b}\Theta^b,$$

$$\omega^{\hat{i}_1}_{j_1} = A^{\hat{i}_1}_{j_1 b_1}\Theta^{b_1} = A^{\hat{i}_1}_{j_1 i_1}\omega^{i_1}_0, A^{\hat{i}_1}_{j_1\hat{b}_1}=0, \tag{13}$$

где

$$A^{\hat{i}_1}_{[j_1 i_1]}=0, B^{a_1}_{\hat{a}_1 b} = -A^{i_1}_{\hat{a}_1 b}B^{a_1}_{i_1},$$

$$A^{\hat{i}_1}_{j_1 b_1} = A^{\hat{i}_1}_{a_1 b_1}B^{a_1}_{j_1}, A^{\hat{i}_1}_{j_1 i_1} = A^{\hat{i}_1}_{a_1 b_1}B^{a_1}_{j_1}B^{b_1}_{i_1}. \tag{14}$$

Из (1) и (2) с учетом (9) и (13) замечаем, что величины (14) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1 b} \equiv dB^{a_1}_{\hat{a}_1 b} + B^{c_1}_{\hat{a}_1 b}\Theta^{a_1}_{c_1} - B^{a_1}_{\hat{b}_1 b}\Theta^{\hat{b}_1}_{\hat{a}_1} - B^{a_1}_{\hat{a}_1 c}\Theta^c_b =$$

$$= B^{a_1}_{\hat{a}_1 bc}\Theta^c,$$

$$dA^{\hat{i}_1}_{j_1 b_1} + A^{\hat{j}_1}_{j_1 b_1}\Omega^{\hat{i}_1}_{\hat{j}_1} - A^{\hat{i}_1}_{k_1 b_1}\Omega^{k_1}_{j_1} - A^{\hat{i}_1}_{j_1 c_1}\Theta^{c_1}_{b_1} = A^{\hat{i}_1}_{j_1 b_1 c}\Theta^c,$$

$$dA^{\hat{i}_1}_{j_1 i_1} + A^{\hat{k}_1}_{j_1 i_1}\Omega^{\hat{i}_1}_{\hat{k}_1} - A^{\hat{i}_1}_{k_1 i_1}\omega^{k_1}_{j_1} - A^{\hat{i}_1}_{j_1 k_1}\omega^{k_1}_{i_1} = A^{\hat{i}_1}_{j_1 i_1 k_1}\omega^{k_1}_0,$$

$$A^{\hat{i}_1}_{[j_1 i_1 k_1]}=0. \tag{15}$$

В соответствии с [7–10] дифференциальные уравнения (13) и (15) свидетельствуют о существовании в общем случае в точке $B\in Q_m$ канонизации реперов Q и P типа (9).

В следующем разделе данной статьи будет дана геометрическая интерпретация дифференцируемого отображения $V^r_{m,n}$: $Q_m\to P_n$ в терминах канонизации реперов Q и P типа (9) в каждом из случаев $m=n$, $m<n$ и $m>n$.

2. Геометрическая характеристика отображения $V^r_{m,n}$

2.1. В соответствии с (6) совокупность всех направлений $u=(\bar{B},\bar{\varepsilon}_a)\,u^a\in Q_m$ при отображении (3), приходящих в точку A_0 удовлетворяет уравнениям

$$A^i_a u^a = 0. \tag{16}$$

С учетом (7) и (9) заключаем, что система (16) в случае отображения $V^r_{m,n}$: $Q_m\to P_n$ имеет единственное решение $u^a=0$. Геометрически это означает, что совокупность всех указанных направлений в точке $B\in Q_m$ образует $(m-r)$-плоскость

$$\Gamma_{m-r} = (\bar{B},\bar{\varepsilon}_{r+1},\ldots,\bar{\varepsilon}_m) \subset Q_m. \tag{17}$$

Поэтому в пространстве Q_m определено распределение

$$\Delta_{m-r,m} : B \to \Gamma_{m-r}. \tag{18}$$

Интегральные кривые, описываемые точкой $B\in Q_m$, распределения (18) в смысле [7] с касательными, принадлежащими Γ_{m-r}, в силу (1) и (17) определяются с учетом (10), (13) и (14) следующей вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений Пфаффа:

$$\Theta^{a_1} = 0 \overset{(9)}{\Leftrightarrow} \omega_0^{\hat{i}_1} = 0, \tag{19}$$

так как

$$B^{a_1}_{[\hat{a}_1 \hat{b}_1]} = 0. \tag{20}$$

Иными словами, распределение (18) является голономным.

2.2. Заметим с учетом (2) и (10), что точка A_0 в соответствующем при отображении $V^r_{m,n}$ проективном пространстве P_n описывает r-поверхность $S_r \subset P_n$ с касательной r-плоскостью

$$L_r = (\bar{A}_0, \bar{A}_1, ..., \bar{A}_r). \tag{21}$$

При этом в силу (2), (13) и (19) r-плоскость $L_r \subset P_n$ постоянна вдоль интегральных кривых распределения (18). Следовательно, в случае $m<n$ поверхность S_m $(m \neq r)$ в P_n

с касательной m-плоскостью $L_m \supset L_r$, о которой идет речь в [2], в соответствии с [10–12] представляет собой $(m-r)$-мерное семейство r-плоскостей L_r, т. е. является тангенциально вырожденной поверхностью в смысле М.А. Акивиса.

Таким образом, с учетом (3), (13), (17) и (21) доказана

Теорема 2.1. Дифференцируемое отображение ранга r: $V^r_{m,n}$: $Q_m \to P_n$ характеризуется тем, что оно каждую $(m-r+1)$-плоскость $_{\Gamma m-r+1}=(\Gamma_{m-r}, \bar{\varepsilon}_{a_1}) u^{a_1} \subset Q_m$ переводит в соответствующее направление $x=(^{a_1}{}_0, \bar{A}_{i_1}) A^{i_1}_{a_1} u^{a_1} \in L_r \subset P_n$.

Здесь $(m-r)$-плоскость $\Gamma_{m-r} \subset Q_m$; $\Gamma_{m-r} \ni B$ является ядром указанного отображения, а r-плоскость L_r касается r-поверхности $S_r \subset P_n$ в точке $A_0 \in P_n$.

2.3. Из результатов предыдущего пункта следует, что во всех случаях $m=n$, $m<n$ и $m>n$ при отображении $V^r_{m,n}$: $Q_m \to P_n$ определена r-поверхность $S_r \subset P_n$ с касательной r-плоскостью L_r в точке $A_0 \in S_m$. Поэтому во всех указанных случаях при отображении $V^r_{m,n}$ можем воспользоваться результатами статьи [2] (в случае m-поверхности $S_m \subset P_n$ для доказательства того, что и с отображением $V^r_{m,n}$ инвариантным образом ассоциируются отображения f^{2n}_m: $Q_m \to M^{2n}$ и f^{2n-1}_m: $Q_m \to M^{2n-1}$ аффинного пространства Q_m в многообразие невырожденных нуль-пар, соответственно.

3. Существование отображения $V^r_{m,n}$

В этом разделе будет обосновано существование отображения $V^r_{m,n}$: $Q_m \to P_n$.

3.1. Из результатов пункта 2.1 с учетом (15) и (18)–(20) следует, что голономное распределение $\Delta_{m-r,m}$ определяется дифференциальными уравнениями:

$$\Theta^{a_1}_{\hat{a}_1} = B^{a_1}_{\hat{a}_1 b} \Theta^b, \nabla B^{a_1}_{\hat{a} b} = B^{a_1}_{\hat{a} bc} \Theta^c,$$
$$(a_1, b_1, c_1 = \overline{1, r}; \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1 = \overline{r+1, m}; a, b, c = \overline{1, m}). \tag{22}$$

Геометрически с учетом (19) это распределение характеризуется тем, что вдоль его интегральных кривых, описываемых точкой $B \in Q_m$, соответствующая точка $A_0 \in P_n$ неподвижна. Вдоль этих интегральных кривых в силу (14), (15) в точке $B \in Q_m$ выполняются дифференциальные уравнения

$$\Theta^{a_1} = 0, \omega_0^{i_1} = 0, \omega_0^{\hat{i}_1} = 0, \omega_{i_1}^{\hat{i}_1} = 0,$$
$$(a_1 = \overline{1, r}; i_1 = \overline{1, r}; \hat{i}_1 = \overline{1, r}). \tag{23}$$

Заметим, что вдоль интегральных кривых распределения $\Delta_{m-r,m}$: $B \to \Gamma_{m-r}$ точка $B \in Q_m$ описывает голономную $(m-r)$-поверхность $\tilde{S}_{m-r} \subset Q_m$ с касательной $(m-r)$-плоскостью (17). Из (22) с учетом (15) и (23) следует, что на $(m-r)$-поверхности $\tilde{S}_{m-r}$ выполняются дифференциальные уравнения

$$\Theta^{a_1} = 0, \ \Theta^{a_1}_{\hat{a}_1} = B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1} \Theta^{\hat{b}_1}, \ \nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1} = B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1 \hat{c}_1} \Theta^{\hat{c}_1},$$
$$B^{a_1}_{[\hat{a}_1 \hat{b}_1]} = 0, \ B^{a_1}_{[\hat{a}_1 \hat{b}_1 \hat{c}_1]} = 0,$$
$$(a_1 = \overline{1, r}; \ \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1 = \overline{r+1, m}). \tag{24}$$

Заметим также, что 1-формы $\Theta^{a_1}_{\hat{a}_1}$ и $\nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1 \hat{c}}$ получены путем внешнего дифференцирования системы $\Theta^{a_1}=0$ с последующим применением леммы Картана [4].

В соответствии с [13, 14] заключаем, что геометрический объект

$$\tilde{\Gamma} = \{B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1}\} \tag{25}$$

является фундаментальным геометрическим объектом $(m-r)$-поверхности $\tilde{S}_{m-r} \subset Q_m$. Структура этого объекта такова, что он является объектом общего вида на $\tilde{S}_{m-r}$. Это означает, что $(m-r)$-поверхность $\tilde{S}_{m-r}$ является $(m-r)$-поверхностью общего вида в пространстве Q_m и определяется с произволом r функций $(m-r)$ аргументов (вдоль интегральных кривых голономного распределения $\Delta_{m-r,m}$).

Таким образом, система дифференциальных уравнений (24) в инволюции в смысле [4].

3.2. Заметим, что инволютивность системы (24) можно показать, если воспользоваться методом Кэлера [4].

Из (24) следует, что общее число N независимых величин $B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1 \hat{c}_1}$, определяющих общий интегральный элемент, равно

$$N = r \cdot \frac{(m-r)(m-r+1)(m-r+2)}{6}.$$

Строим цепь по формам базиса $\Theta^{a_1}=0, [\Theta^{r+1} ... \Theta^m]$.

Линейный элемент $E_{r+1}(\Theta^{a_1}=0, \ \Theta^{r+2}=...=\Theta^m=0)$ определяется дифференциальными уравнениями

$$\nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1} = B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1 r+1} \Theta^{r+1}, \Theta^{a_1} = 0, \Theta^{r+2} = ... = \Theta^m = 0.$$

Произвол линейного элемента E_{r+1} равен

$$R_{r+1} = \frac{r \cdot (m-r)(m-r+1)}{2}. \tag{26}$$

Давая всем R_{r+1} величинам $B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1, r+1}$ произвольные, но определенные значения $\overset{0}{B}{}^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1, r+1}$, получаем элемент E^0_{r+1}. Второй элемент $E_{r+2}(\Theta^{a_1}=0, \Theta^{r+3}=...=\Theta^m=0)$, проходящий через элемент E^0_{r+1}, определяется дифференциальными уравнениями

$$\nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1} = \overset{0}{B}{}^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1, r+1} \Theta^{r+1} + B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1, r+2} \Theta^{r+2},$$
$$(\Theta^{a_1} = 0, \Theta^{r+3} = \ldots = \Theta^m = 0). \tag{27}$$

Коэффициенты при Θ^{r+1} уже известны. Поэтому из (27) в силу $B^{a_1}_{[\hat{a}_1 \hat{b}_1 \hat{c}_1]}=0$ замечаем, что произвол линейного элемента E_{r+2}, проходящего через элемент E^0_{r+1}, равен

$$R_{r+2} = \frac{r \cdot (m-r-1)(m-r-2)}{2}. \tag{28}$$

Продолжая процесс, мы получаем, что интегральный элемент E_m, проходящий через элемент E^0_{m-1}, определяется дифференциальными уравнениями

$$\nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1} = \overset{0}{B}{}^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1 h} \Theta^h + B^{a_1}_{\hat{a}_1 \hat{b}_1 m} \Theta^m,$$
$$(\Theta^{a_1} = 0, \Theta^m \neq 0, h = \overline{1, m-1}). \tag{29}$$

Коэффициенты при Θ^h уже известны. Поэтому из (29) следует, что произвол элемента E_m, проходящего через элемент E^0_{m-1}, равен

$$R_m = r \cdot \frac{\begin{pmatrix} \{(m-r)-(m-r-1)\} \times \\ \times \{(m-r)-(m-r-2)\} \end{pmatrix}}{2} = r. \tag{30}$$

Из (26), (28) и (30) в силу (25) и в соответствии с [4] заключаем, что число Картана Q равно

$$Q = R_{r+1} + R_{r+2} + \ldots + R_m = N,$$

т. е. система (24) в инволюции и определяет решение с произволом r функций $m-r$ аргументов. Поэтому доказано, что отображение $V^r_{m,n}: Q_m \to P_n$ существует.

Замечание 3.1. Учитывая результаты раздела 2, можно дать следующее геометрическое представление отображения $V^r_{m,n}: Q_m \to P_n$.

В аффинном пространстве Q_m с произволом r функций $m-r$ аргументов задается $(m-r)$-поверхность $\tilde{S}_{m-r} \subset Q_m$ с касательной $(m-r)$-плоскостью Γ_{m-r} в точке $B \in \tilde{S}_{m-r}$. Каждой точке $B \in \tilde{S}_{m-r}$ сопоставляется центропроективное пространство P_n с центром в точке A_0 так, что в этом пространстве задается соответствующая r-плоскость $L_r \ni A_0$.

В итоге вдоль $\tilde{S}_{m-r} \subset Q_m$ точка $A_0 \in P_n$ является текущей точкой r-поверхности $S_r \subset P_n$ с касательной r-плоскостью L_r.

Выводы

В работе рассмотрено регулярное отображение ранга r аффинного и проективного пространств. Дана геометрическая характеристика этого отображения. Показано, что с данным отображением инвариантно ассоциируется отображение m-мерного аффинного пространства в многообразие невырожденных нуль-пар. Доказывается (геометрически и методом Кэлера), что рассматриваемое многообразие существует. Полученные результаты могут быть использованы для детального изучения невырожденных нуль-пар и доказательства существования дифференцируемого отображения аффинных и проективных пространств в общих случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль-Хассани М.А., Молдаванова Е.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 28–32.
2. Ивлев Е.Т., Аль-Хассани М.А., Лучинин А.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространств (mn) // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 16–20.
3. Ивлев Е.Т., Аль-Хассани М.А., Лучинин А.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространств $(m>n)$ // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 324. – № 2. – С. 47–51.
4. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
5. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М.: ГИТТЛ, 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
6. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды геометрического семинара. Т. 6. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1974. – С. 37–42.
7. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. – 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
8. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображения аффинных и евклидовых пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 8–14.
9. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev.math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
10. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
11. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.
12. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей // Институт научной информации. Итоги науки. Геометрия. – М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1965. – С. 5–64.
13. Остиану Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Труды геометрического семинара. – М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1966. – Т. 1. – С. 239–263.
14. Швейкин П.И. Нормальные геометрические объекты поверхности в аффинном пространстве // Труды геометрического семинара. – М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 331–423.

Поступила 10.02.2013 г.

UDC 514.757.2

DIFFERENTIABLE MAPPING OF *R* RANK IN AFFINE Q_m AND PROJECTIVE P_n SPACES

Mudkhar Abbas Al-Khassani,
University of Basrah, Iraq; Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: mughar73@yahoo.com

Anatoly A. Luchinin,
Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: luchinin@tpu.ru.

The urgency of the work is caused by necessity of additional studying of special mapping $V^r_{m,n}$ of r<min (m, n) rank in affine Q_m and projective P_n spaces.
The main aim of the study. *The previous works considered the mappings $V_{m,n}$, when r<min (m, n) in cases m=n, m<n, m>n. In the given work the authors consider the differentiable mapping $V^r_{m,n}$ of r<min (m,n) rank in affine space Q_m and projective space P_n.*
Methods of research*. The basic methods of research are Cartan method of external forms in local differential geometry and G.F. Lapteva's theoretical-group method. These methods assume local studying of the considered object and the use of functions of a class C^∞.*
Results*. The paper considers the regular mapping of rank of affine and projective spaces. The geometrical characteristic of this mapping is given. The mapping of m-dimensional affine space in manifold nonsingular null-pair is associated with $V^r_{m,n}$ invariant mapping. The existence of the given mapping is proved (geometrically and by Kähler's method). The authors studied analytically and geometrically the structure of internal fundamental geometrical object of mapping $V^r_{m,n}$.*

Key words:
Differentiated mapping, multidimensional spaces and surfaces, geometrical objects.

REFERENCES

1. Al-Khassani M.A., Moldovanova E.A. Differentsiruemoe otobrazhenie affinnogo Q_m i proektivnogo P_n prostranstv [Differentiable mapping of affine Q_m and projective P_n spaces]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 28–32.
2. Ivlev E.T., Al-Khassani M.A., Luchinin A.A. Differentsiruemoe otobrazhenie affinnogo Q_m i proektivnogo P_n prostranstv (*m<n*) [Differentiable mapping of affine Q_m and projective P_n spaces (*m<n*)]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 16–20.
3. Ivlev E.T., Al-Khassani M.A., Luchinin A.A. Differentsiruemoe otobrazhenie affinnogo Q_m i proektivnogo P_n prostranstv (*m>n*) [Differentiable mapping affine Q_m and projective P_n spaces (*m>n*)]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 324, no. 2, pp. 47–51.
4. Finikov C.P. *Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometrii* [Method of Cartan's exterial forms in differential geometry]. Moscow, GITTL, 1948. 432 p.
5. Laptev G.F. Differentsialnaya geometriay pogruzhennykh mnogoobraziy [Differential geometry of the immersed manifolds]. *Trudy matematicheskogo obshchestva* [Proc. of Moscow mathematical society]. Moscow, GITTL, 1953, no. 2, pp. 275–382.
6. Laptev G.F. K invariantnoy teorii differentsialnykh otobrazheniy [To the invariant theory of differentiable mappings]. *Trudy geometricheskogo seminara* [Proc. of a geometrical seminar]. Moscow, Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR, 1974. Vol. 6, pp. 37–42.
7. Evtushik L.E., Lumiste Yu.G., Ostianu N.M., Shirokov A.P. Differentsialno-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh [Differential-geometrical structure on manifolds]. *Results of a science and engineering. Series*: *Problems of geometry*, 1979, vol. 9, pp. 3–246.
8. Ivlev E.T., Luchinin A.A. Otobrazhenie affinnykh i evklidovykh prostranstv [Mapping affine and Euclidean spaces]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2010, vol. 317, no. 2, pp. 8–14.
9. Ostianu N.M. O kanonizatsii podvizhnogo repera pogruzhennogo mnogoobraziya [On canonization of a mobile reference point of the immersed manifold]. *Rev. math. pures et appl.* (*RNR*), 1962, no. 2, pp. 231–240.
10. Akivis M.A. Fokalnye obrazy poverkhnosti ranga *r* [Focal images of surface of a rank *r*]. *Bulletin of high schools. Mathematics*, 1957, no. 1, pp. 9–19.
11. Akivis M.A. Ob odnom klasse tangentsialno vyrazhdennykh poverkhnostey [On one class of tangential singular surfaces]. *Reports of Academy of Sciences the USSR*, 1962, vol. 146, no. 3, pp. 515–518.
12. Laptev G.F. Differentsialnaya geometriya mnogomernykh poverkhnostey [Differential geometry of multidimentional surfaces]. *Institut nauchnoy informatsii. Itogi nauki. Geometriya* [Institute of the scientific information. Result of a science. Geometry]. Moscow, Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR, 1965, pp. 239–263.
13. Ostianu N.M. O geometrii mnogomernoy poverkhnosti proektivnogo prostranstva [On geometry of a multidimmentional surface of projective space]. *Trudy geometricheskogo seminara* [Proc. of a geometrical seminar]. Moscow, Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR, 1966. Vol. 1, pp. 239–263.
14. Shveykin P.I. Normalnye geometricheskie obekty poverkhnosti v affinnom prostranstve [Normal geometrical objects of a surface in affine space]. *Trudy geometricheskogo seminara* [Works of a geometrical seminar]. Moscow, Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR, 1966. Vol. 1, pp. 331–423.