

REFERENCES

1. Kitaeva A.V., Stepanova N.V. Upravlenie optionsnymi resursami [Control of optional resources]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 322, no. 5, pp. 23–28.
2. Chatwin R.E. Optimal dynamic pricing of perishable products with stochastic demand and a finite set of prices. *European Journal of Operational Research*, 2000, vol. 125, pp. 149–174.
3. Nazarov A.A. *Asimptoticheskiy analiz markoviziruemykh sistem* [Asymptotic analysis of Markovian systems]. Tomsk, Tomsk University Publ., 1991. 166 p.
4. Harrison J.M. *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*. New York, John Wiley and Sons, 1985. 140 p.
5. Wee H.M., Chiamsiri S. Continuous-review inventory models using diffusion approximation for bulk queues. *International Journal of Industrial Engineering: Theory, Applications and Practice*, 2012, vol. 19, no. 10, pp. 354–389.
6. Kitaeva A., Stepanova N. Diffusion approximation in inventory management. *Book of Abstract of the 15th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference (ASMDA2013)*. Mataro (Barcelona), Spain, 25–28 June 2013. International Society for the Advancement of Science and Technology, 2013. p. 115.
7. Novitskaya E.V., Terpugov A.F. *Optimizatsiya roznichnoy prodazhi skoroprotivosteyashchey produktii* [Optimization of retailing perishable products]. Tomsk, Tomsk University Publ., 2004. 93 p.
8. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* [Reference book on operating calculus]. Moscow, Vysshaya shkola, 1965. 544 p.

УДК 621.52+511.52

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

С.О. Симонян

Государственный инженерный университет Армении (Политехник), г. Ереван
E-mail: ssimonyan@seua.am

Актуальность работы обусловлена необходимостью эффективного определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза, достаточно часто встречающихся при решении неавтономных линейных систем конечных уравнений, задач оптимального управления, неавтономных матричных уравнений, при сингулярном разложении, в задачах расщепления линейных динамических систем, при решении линейных многоточечных краевых задач, непрерывных задач математического программирования, при нахождении корней алгебраических многочленов с переменными коэффициентами и др.

Цель работы: разработка параллельных матрично-векторных и матричных вычислительных методов определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза.

Методы исследования: при решении рассматриваемой задачи были использованы методы линейной алгебры, теории матриц, дифференциальных преобразований, численных методов, параллельных вычислений, методы машинного моделирования, а также современные информационные технологии.

Результаты: доказана теорема об определении параметрических обобщенных обратных матриц на основе использования аппарата дифференциальных преобразований, сводящего решение непрерывной задачи к решению эквивалентной числовой задачи, обеспечивающую высокую эффективность вычислительных процедур.

Ключевые слова:

Параметрические матрицы, обобщенные обратные матрицы, дифференциальные преобразования, параллельные матрично-векторные и матричные вычислительные методы.

Введение

Для определения параметрических обобщенных обратных матриц

$$X(t) = A^+(t) \in R^{n \times m}$$

Мура–Пенроуза [1, 2] при параметрических матрицах $A(t) \in R^{m \times n}$ (заметим, что параметр t может

быть временем, оператором Лапласа $\left(S \sim \frac{d}{dt}\right)$ или

другим параметром) на основе дифференциальных преобразований Пухова [3] в работе [4] был предложен дифференциальный аналог (Д-аналог) определения $X(t) \equiv A^{(1)}(t)$, основанный на первом известном условии Мура–Пенроуза [1, 2]

$$A(t) = A(t)X(t)A(t), \quad (1)$$

а в работе [5] – Д-аналог определения $X(t) \equiv A^{(2)}(t)$, основанный на втором известном условии [1, 2]

$$X(t) = X(t)A(t)X(t). \quad (2)$$

При этом наряду с условиями (2) и (3) выполняются также третье и четвертое условия Мура–Пенроуза – условия симметричности [1, 2]

$$[A(t)X(t)]^T = A(t)X(t), \quad (3)$$

$$[X(t)A(t)]^T = X(t)A(t). \quad (4)$$

В настоящей работе для определения $X(t)$ предлагаются параллельные матрично-векторные и матричные вычислительные методы, основанные на неявных последовательных рекуррентных вычислительных схемах, предложенных в работах [4, 5].

Математический аппарат

Дифференциальные преобразования параметрических матриц $A(t)$ и $X(t)$ соответственно имеют вид

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K A(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v},$$

$$K = \overline{0, \infty} \bullet A(t) = \mathfrak{N}_1(t, t_v, H, A(K)),$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K X(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v},$$

$$K = \overline{0, \infty} \bullet X(t) = \mathfrak{N}_2(t, t_v, H, X(K)),$$

где $K = \overline{0, \infty}$ – целочисленный аргумент; $A(K)$ и $X(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ – матричные дискеты матричных оригиналов $A(t)$ и $X(t)$ соответственно с размерами $m \times n$ и $n \times m$ (прямые дифференциальные преобразования), H – масштабный коэффициент; t_v – центр аппроксимации; $\mathfrak{N}_1(\bullet)$ и $\mathfrak{N}_2(\bullet)$ – обратные дифференциальные преобразования, восстанавливающие оригиналы – матрицы $A(t)$ и $X(t)$ соответственно; символ $\bullet$ – знак перехода из области оригиналов в область Д-изображений и наоборот [3].

1. На основе использования условия (1) и перевода его из области оригиналов в область Д-изображений в работе [4] была получена следующая неявная последовательная рекуррентная вычислительная схема для определения неизвестных матричных дискрет $X(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ обобщенной обратной матрицы $X(t)$:

при $K = 0$: $A(0) = A(0)X(0)A(0)$,

при $K = 1$: $A(1) = A(1)X(0)A(0) + A(0)X(1)A(0) + A(0)X(0)A(1)$,

при $K = 2$: $A(2) = A(2)X(0)A(0) + A(1)X(1)A(0) + A(1)X(0)A(1) + A(0)X(2)A(0) + A(0)X(1)A(1) + A(0)X(0)A(2)$,

при $K = 3$: $A(3) = A(3)X(0)A(0) + A(2)X(1)A(0) + A(2)X(0)A(1) + A(1)X(2)A(0) + A(1)X(1)A(1) + A(1)X(0)A(2) + A(0)X(3)A(0) + A(0)X(2)A(1) + A(0)X(1)A(2) + A(0)X(0)A(3)$,

при $K = K$: $A(K) =$

$$= X(0) \left[A(K) - \sum_{\substack{p=K, q=K-1, r=K \\ p=0, q=0, r=0 \\ p+q+r=K}} A(p)X(q)A(r) \right] X(0). \quad (5)$$

В этой вычислительной схеме в правой части каждого матричного уравнения содержится $0,5(K+1)(K+2)$ слагаемых. Этот факт может служить важным контрольным условием правильности вычислительных расчетов. Нетрудно убедиться также в том, что последовательную рекуррентную вычислительную схему (5) можно представить и в следующем матрично-векторном виде:

$$\begin{pmatrix} A(0) \\ A(1) \\ A(2) \\ \vdots \\ A(K) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A(1) & A(0) & 0 & \dots & 0 \\ A(2) & A(1) & A(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(K) & A(K-1) & A(K-2) & \dots & A(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A(0) \\ A(1) \\ A(2) \\ \vdots \\ A(K) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(K) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X(1) & X(0) & 0 & \dots & 0 \\ X(2) & X(1) & X(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X(K) & X(K-1) & X(K-2) & \dots & X(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A(0) \\ A(1) \\ A(2) \\ \vdots \\ A(K) \end{pmatrix}$$

или в компактной записи

$$A(\overline{0, K}) = \overline{A(0, K)} \cdot \overline{X(0, K)} \cdot \overline{A(0, K)}, \quad (6)$$

где $\overline{A(0, K)} = [A(0)|A(1)|\dots|A(K)]^T$ – составной гипервектор-столбец-матрица с размерами $(K+1)m \times n$;

$\overline{A(0, K)}$ – составная блочная нижнетреугольная гиперматрица с размерами $(K+1)m \times (K+1)n$ с матричными элементами $A(0), A(1), \dots, A(K)$ (с матричными элементами $A(0)$ на главной диагонали, с матричными элементами $A(1)$ на нижней поддиагонали и т. д. до матричного элемента $A(K)$ включительно);

$\overline{X(0, K)}$ – составная блочная нижнетреугольная гиперматрица с размерами $(K+1)n \times (K+1)m$ с матричными элементами $X(0), X(1), \dots, X(K)$ (с матричными элементами $X(0)$ на главной диагонали, с матричными элементами $X(1)$ на нижней поддиагонали и т. д. до матричного элемента $X(K)$ включительно).

Последовательную рекуррентную вычислительную схему (5) можно представить и в следующем, более сложном, матричном виде:

$$\begin{bmatrix} A(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A(1) & A(0) & 0 & \dots & 0 \\ A(2) & A(1) & A(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(K) & A(K-1) & A(K-2) & \dots & A(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A(1) & A(0) & 0 & \dots & 0 \\ A(2) & A(1) & A(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(K) & A(K-1) & A(K-2) & \dots & A(0) \end{bmatrix} \bullet$$

$$\bullet \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X(1) & X(0) & 0 & \dots & 0 \\ X(2) & X(1) & X(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X(K) & X(K-1) & X(K-2) & \dots & X(0) \end{bmatrix} \bullet$$

$$\bullet \begin{bmatrix} A(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A(1) & A(0) & 0 & \dots & 0 \\ A(2) & A(1) & A(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(K) & A(K-1) & A(K-2) & \dots & A(0) \end{bmatrix}$$

или в компактной записи

$$\overline{A(0, K)} = \overline{A(0, K)} \cdot \overline{X(0, K)} \cdot \overline{A(0, K)}. \quad (7)$$

Однако, в отличие от матрично-векторного представления (6), полностью соответствующего вычислительной схеме (5), матричное представление (7) обладает достаточно высокой степенью избыточности: оно содержит $K+1$ одинаковых соотношений для определения матричного дискрета $X(0)$, K одинаковых соотношений для определения матричного дискрета $X(1), \dots, 1$ соотношение для определения матричного дискрета $X(K)$. Иными словами, в этой схеме содержатся $0,5(K+1)(K+2)$ матричных уравнений, ввиду чего ее избыточность равна $0,5(K+1)(K+2) - (K+1) = 0,5K(K+1)$. С другой стороны, несмотря на такую высокую избыточность, числовое представление (7), в отличие от числового представления (60), не обладающего избыточностью вообще, очевидно, является гипераналогом параметрического представления (23) с точно-

стью до составных гиперматриц $\overline{A(0, K)}$ и $\overline{X(0, K)}$, чем не обладает числовое представление (6). Отсюда следует весьма важное соотношение:

$$\overline{X(0, K)} = \overline{A(0, K)}^+. \quad (8)$$

2. На основе использования условия (3) и перевода его из области оригиналов в область Д-изображений в работе [5] была получена следующая неявная последовательная рекуррентная вычислительная схема для определения неизвестных матричных дискрет $X(K)$, $K=0, \infty$ обобщенной обратной матрицы $\overline{X(t)}$:

$$\begin{aligned} \text{при } K=0: & X(0) = X(0)A(0)X(0), \\ \text{при } K=1: & X(1) = X(1)A(0)X(0) + X(0)A(1)X(0) + \\ & + X(0)A(0)X(1), \\ \text{при } K=2: & X(2) = X(2)A(0)X(0) + X(1)A(1)X(0) + \\ & + X(1)A(0)X(1) + X(0)A(2)X(0) + \\ & + X(0)A(1)X(1) + X(0)A(0)X(2), \\ \text{при } K=3: & X(3) = X(3)A(0)X(0) + X(2)A(1)X(0) + \\ & + X(2)A(0)X(1) + X(1)A(2)X(0) + \\ & + X(1)A(1)X(1) + X(1)A(0)X(2) + \\ & + X(0)A(3)X(0) + X(0)A(2)X(1) + \\ & + X(0)A(1)X(2) + X(0)A(0)X(3), \\ & \vdots \\ \text{при } K=K: & X(K) = - \sum_{\substack{p=K-1, q=K, r=K-1 \\ p+q+r=K}} X(p)A(q)X(r). \end{aligned} \quad (9)$$

В этой вычислительной схеме, как и в (5), в правой части каждого матричного уравнения также содержится $0,5(K+1)(K+2)$ слагаемых. Этот факт и здесь может служить важным контрольным условием правильности вычислительных расчетов. Нетрудно убедиться также в том, что последовательную рекуррентную вычислительную схему (9) можно представить и в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X(1) & X(0) & 0 & \dots & 0 \\ X(2) & X(1) & X(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X(K) & X(K-1) & X(K-2) & \dots & X(0) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X(1) & X(0) & 0 & \dots & 0 \\ X(2) & X(1) & X(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X(K) & X(K-1) & X(K-2) & \dots & X(0) \end{bmatrix} \bullet \\ & \bullet \begin{bmatrix} A(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A(1) & A(0) & 0 & \dots & 0 \\ A(2) & A(1) & A(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A(K) & A(K-1) & A(K-2) & \dots & A(0) \end{bmatrix} \bullet \\ & \bullet \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X(1) & X(0) & 0 & \dots & 0 \\ X(2) & X(1) & X(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X(K) & X(K-1) & X(K-2) & \dots & X(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

или в компактной записи

$$\overline{X(0, K)} = \overline{X(0, K)} \cdot \overline{A(0, K)} \cdot \overline{X(0, K)}, \quad (10)$$

где $\overline{X(0, K)}$ и $\overline{A(0, K)}$ – также составные блочные нижнетреугольные гиперматрицы с размерами $(K+1)n \times (K+1)m$ и $(K+1)m \times (K+1)n$.

Числовое представление (10), в свою очередь, очевидно, является гипераналогом параметрического представления (2) с точностью до составных гиперматриц $\overline{X(0, K)}$ и $\overline{A(0, K)}$. Отсюда также следует вышеприведенное важное соотношение (8), т. е.:

$$\overline{X(0, K)} = \overline{A(0, K)}^+. \quad (11)$$

Замечание 1. Таким образом, при использовании условий (1) и (2) Мура–Пенроуза получены соответствующие гипераналоги (7) и (10) с точностью до составных гиперматриц $\overline{A(0, K)}$ и $\overline{X(0, K)}$. При этом естественно совпадение соотношений (8) и (11), что и должно было быть.

Замечание 2. Существование и единственность [1, 2] псевдообратной гиперматрицы (8) или (11), очевидно, гарантирует существование и единственность матричных дискрет $X(0), X(1), \dots, X(K)$ и, следовательно, существование и единственность решения $X(t)$.

Пример [6]. Рассмотрим параметрическую матрицу

$$H(S) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{S+1} & 0 \\ \frac{1}{(S+1)^2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где S – оператор Лапласа, а $H(S)$ – желаемая передаточная функция замкнутой системы автоматического управления. Не вдаваясь в подробности, заметим, что для решения задачи компенсации обратной связи в системе автоматического управления, помимо решения других задач, необходимо определить и обобщенную обратную матрицу $H^+(S)$ [6–8]. С этой целью воспользуемся матрицей

$\overline{H(0,5)}$. Очевидно, при маклореновском центре аппроксимации $S_0=0$ и масштабном коэффициенте $H=1$, имеем

$$\begin{aligned} H(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & H(1) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ H(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & H(3) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ H(4) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & H(5) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и т. д., а также соотношения

$$\begin{aligned} H(0) \cdot X(0) &= E_{2 \times 2}, \\ X(0) \cdot H(0) &\neq E_{3 \times 3}, \end{aligned}$$

$$\text{где } X(0) = H^+(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, при $K_{\max}=5$ гиперматрица $\overline{H(0,5)}$ с размерами 12×18 будет иметь следующий вид:

$$\overline{H(0,5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисление псевдообратной к этой гиперматрице гиперматрицы $\overline{X(0,5)}$ применением пакета MATLAB [9] приводит к следующему:

$$\overline{H(0,5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матричные дискреты

$$X(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X(1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K \geq 3,$$

при которых решение $X(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} H^+(S) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot S + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot S^2 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (1+S)^2 \\ (1+S) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

что точно совпадает с результатом, полученным в работах [6–8] другими методами.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \overline{H(0,K)} \cdot \overline{X(0,K)} &= E_{12 \times 12}, \\ \overline{X(0,K)} \cdot \overline{H(0,K)} &\neq E_{18 \times 18}, \end{aligned}$$

которые, очевидно, аналогичны вышеприведенным соотношениям для матриц $H(0)$ и $X(0)$. Кроме того, при этом имеют место и гипераналоги (7) и (10). Что же касается решения $X(t)$, то нетрудно

убедиться также, что при нем действительно выполняются и условия (2)–(5).

Заключение

Таким образом, вне зависимости от использования предложенных вычислительных схем, для параллельного определения матричных дискрет $X(0), X(1), X(2), \dots, X(K)$ необходимо лишь составить гиперматрицу $\overline{A(0, K)}$ с использованием заранее определенных матричных дискрет $A(0), A(1), A(2), \dots, A(K)$ и применением некоторого вычислительного метода нахождения числовых псевдообратных матриц [1, 2] рассчитать гиперматрицу $\overline{A(0, K)}^+$. Естественно, первый столбец или последняя строка этой гиперматрицы будут содержать искомые матричные дискреты $X(0), X(1), X(2), \dots, X(K)$ или $X(K), X(K-1), X(K-2), \dots, X(0)$ соответственно. Восстановление обобщенной обратной матрицы $X(t)$ можно осуществить в соответствии с некоторым обратным дифференциальным преобразованием $\mathcal{N}_2(t, t_0, H, X(K))$, $K=0, \infty$.

Однако, к сожалению, уже при небольших размерах параметрических матриц $A(t)$ и использовании небольшого количества матричных дискрет обобщенных обратных матриц размерность гиперматрицы $\overline{A(0, K)}$ быстро возрастает и для вычисления псевдообратной к ней гиперматрицы $\overline{X(0, K)}$

может потребоваться достаточно большое машинное время при использовании традиционных последовательных способов обработки данных [10]. Так, при рассмотренной матрице $H(S)$ с размерами 2×3 и количестве матричных дискрет 6 ($K=0, 5$) размерность гиперматрицы $\overline{H(0, K)}$ уже равна 12×18 . Следовательно, ввиду такого обстоятельства, целесообразно использование эффективных вычислительных методов определения числовых псевдообратных матриц [1, 2, 9], ибо при решении больших задач вопрос об эффективности применяемого метода может оказаться ключевым [10. С. 221].

Наконец, сформулируем следующее важное утверждение:

Теорема. Если параметрическая матрица $A(t)$ аналитическая (т. е. в центре аппроксимации t_0 существуют матричные дискреты $A(K)$, $K=0, \infty$), то параметрическую обобщенную к ней матрицу Мура–Пенроуза $X(t)=A(t)^+$ можно определить некоторым обратным дифференциальным преобразованием, при этом заранее составляя блочную нижнетреугольную гиперматрицу $\overline{A(0, K)}$ на основе использования матричных дискрет $A(K)$, $K=0, \infty$ и вычислив числовую псевдообратную к ней гиперматрицу $\overline{X(0, K)} = \overline{A(0, K)}^+$, содержащую матричные дискреты $X(K)$, $K=0, \infty$ искомой параметрической обобщенной обратной матрицы $X(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized Inverses. Theory and Applications. – USA: Interscience Publication, 2002. – 371 p.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с.
3. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова думка, 1990. – 184 с.
4. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Симонян А.С. Метод определения параметрических обобщенных обратных матриц (I) // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2008. – Т. LXI. – № 3. – С. 452–463.
5. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Симонян А.С. Метод определения параметрических обобщенных обратных матриц (II) // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. – 2008. – Т. LXI. – № 4. – С. 584–591.
6. Karampetakis N.P. Computation of the Generalized Inverse of a Polynomial Matrix and Applications // Linear Algebra Appl. – 1995. – V. 252. – P. 35–60.
7. Бадалян Л.А. Разработка методов определения псевдообратных нестационарных матриц и автоматизация вычислительных процедур: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Ереван, 2007. – 24 с.
8. Симонян А.С. Разработка численно-аналитических методов определения параметрических обобщенных обратных матриц Мура–Пенроуза и автоматизация вычислительных процедур: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Ереван, 2013. – 24 с.
9. The MathWorks, Inc., MATLAB The language of technical programming. Using MATLAB Graphics, Version 7.
10. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 608 с.

Поступила 30.09.2013 г.

PARALLEL COMPUTING METHODS TO DETERMINE PARAMETRIC GENERALIZED INVERSE MATRICES

S.H. Simonyan

State Engineering University of Armenia (Polytechnic), Yerevan

The relevancy of the work is conditioned by the necessity to determine effectively the Moore–Penrose generalized parametric inverse matrices which are quite often encountered when solving non-autonomous linear systems of finite equations, optimal control problems, non-autonomous matrix equations, singular decomposition problems, linear dynamic system splitting problems, linear multipoint boundary value problems, continuous tasks of mathematical programming problems, when finding out the roots of algebraic polynomials with variable coefficients.

Work objective is to develop matrix-vector and array computational methods for determining Moore–Penrose generalized parametric inverse matrices.

Methods of research: when solving the problem in question the following methods were used: linear algebra methods, matrix theory, differential transformation theory, numerical technique theory, parallel computing theory, computer modeling methods and data engineering.

Results: The author has proved the theorem of determining the generalized parametric inverse matrices based on application of the differential transformation apparatus, reducing the solution of the continuous task to solution of the equivalent numeric problem providing high effectiveness of computational procedures.

Key words:

Parametric matrices, parametric generalized inverse matrices, differential transformations, parallel matrix-vector and matrix computational methods.

REFERENCES

1. Ben-Israel A., Greville T.N.E. *Generalized Inverses. Theory and Applications*. USA, A. Wiley, Interscience Publication, 2002. 371 p.
2. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 560 p.
3. Pukhov G.E. *Differentsialnye spektry i modeli* [Differential spectra and models]. Kiev, Naukova dumka, 1990. 184 p.
4. Simonyan S.O., Avetisyan A.G., Simonyan A.S. Metod opredeleniya parametricheskikh obobshchennykh obratnykh matrits (I) [Method for determining parametric generalized inverse matrices]. *Izvestiya NAN RA i GIUA. Ser. TN*, 2008, vol. LXI, no. 3, pp.452–463.
5. Simonyan A.S. Metod opredeleniya parametricheskix obobshchennykh obratnykh matrits (II) [Method for determining parametric generalized inverse matrices]. *Izvestiya NAN RA i GIUA. Ser. TN*, 2008, vol. LXI, no. 4, pp. 584–591.
6. Karampetakis N.P. Computation of the Generalized Inverse of a Polynomial Matrix and Applications. *Linear Algebra Appl.*, 1995, vol. 252, pp. 35–60.
7. Badalyan L.A. *Razrabotka metodov opredeleniya psevdobratnykh nestatsionarnykh matrits i avtomatizatsiya vychislitelnykh protsedur*. Avtoreferat diss. kand. tekhn. nauk [Development of methods to determine pseudoinverse nonsteady matrices and computer procedure automation. Cand. tech. sci. diss. abstr.]. Erevan, 2007. 24 p.
8. Simonyan A.S. *Razrabotka chislenno-analiticheskikh metodov opredeleniya parametricheskikh obobshchennykh obratnykh matrits Mura–Penrouza i avtomatizatsiya vychislitelnykh protsedur*. Avtoreferat diss. kand. tekhn. nauk [Development of numerical analytic methods for determining parametric generalized inverse matrices of Moore–Penrose and computer procedure automation. Cand. tech. sci. diss. abstr.]. Erevan, 2013. 24 p.
9. *The MathWorks, Inc., MATLAB The language of technical programming. Using MATLAB Graphics, Version 7*.
10. Voevodin V.V., Voevodin V.I. *Parallelnye vychisleniya* [Parallel computing]. Saint-Petersburg, BXV-Peterburg Publ., 2004. 608 p.