СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушик П.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. – 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
2. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Тр. Геом. Сем. – 1974. – № 16. – С. 37–42.
3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Сер. Геометрия. – 1965. – Т. – С. 65–107.
4. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1971. – Т. – С. 153–174.
5. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
6. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТП, 1948. – 432 с.
7. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.

Поступила 15.02.2013 г.

УДК 517

ПОЛИНОМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ЛОКАЛЬНОМ ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ НА ОСНОВЕ *d*-ОПЕРАТОРА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Показано, что в локальном дробном анализе имеются достаточно простые интегрируемые функции нецелочисленных порядков, базовая первообразная соответствующего порядка от которых равна нулю.

Ключевые слова:
d-оператор, полиномы дифференцирования, полиномы интегрирования.
Key words:
d-operator, differentiation polynomials, integration polynomials.

Введение

В локальном дробном анализе появляются новые функции, зависящие от порядка интегродифференцирования, которые можно назвать элементарными и которые в стандартном анализе или обращаются в константы, в частности в ноль, или вообще теряют смысл, поэтому такие функции в стандартном анализе отсутствуют и их удобно приравнивать к нулю [1, 2].

Аналоги функций стандартного анализа в локальном дробном анализе в общем случае имеют другие свойства, зависящие от их порядка. Более того, для многих функций в локальном дробном анализе имеет место вырождение, когда они имеют не один аналог, а более одного, конечное или бесконечное счётное множество [2, 3].

В частности, в локальном дробном анализе появляются своеобразные функции, которые можно отнести к элементарным функциям локального дробного анализа, которые были названы *полиномами дифференцирования*.

Полиномы дифференцирования

Определение. Ненулевая интегрируемая функция $C_{-s}(x)$, выражающаяся через дробностепенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-s};\ k = 0, 1, 2, 3, ...;\ \mathbb{N};\ b,\ s \in \mathbb{C};\ b,\ s = \text{const},$$

с шагом равным 1, будем называть *полиномом дифференцирования*.

Шаг ряда – это модуль разности показателей степеней степенных функций любых двух соседних элементов дробностепенного ряда.

Функций, аналогичных полиномам дифференцирования в стандартном анализе, нет.

Теорема. Первообразная порядка s от полинома дифференцирования $C_{-s}(x)$ порядка s равна нулю с точностью до сложения с полиномом интегрирования $C_s(x)$.

Первообразная функция называется *базовой первообразной*, если её полином интегрирования, в силу его произвольности, приравнять к нулю.

Тогда утверждение теоремы равносильно тому, что базовая первообразная нецелочисленного порядка s от полинома дифференцирования порядка s равна нулю.

Доказательство. Используя d-оператор дробного интегрирования порядка s [3, 4], легко проинтегрировать полином дифференцирования

$$d^s x : C_{-s}(x) = d^s x : \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-s} = C_{-s}^{(-s)}(x) + C_s(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(-k-s+1)}{\Gamma(-k-s+s+1)} x^{-k-s+s} + C_s(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(-k-s+1)}{\Gamma(-k+1)} x^{-k} + C_s(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(-k-s+1)}{\infty} x^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k+s} =$$

$$= 0 + C_s(x) = C_s(x); \quad x \in \mathbb{R}; s, a_k, b_k \in \mathbb{C}.$$

Здесь s, a_k, b_k=const; $s \neq 0,1,2,3,...$; $C_{-s}^{(-s)}(x)$ – базовая первообразная порядка s от полинома дифференцирования порядка s.

Полином дифференцирования задаётся через степенной ряд, в котором элементы ряда пропорциональны степенным функциям x^{-k-s}, которые обращаются в ноль при однократном воздействии d-оператором интегрирования порядка s

$$d^s x : x^{-k-s} = 0 + C_s(x).$$

Определение. Вещественные степенные функции x^{-k-s} (k=0,1,2,3,...) будем называть *нильпотентными функциями дифференцирования комплексного порядка s ($s \neq 0,1,2,3,...$) степени* 1.

Введём и более общие нильпотентные функции дифференцирования.

Определение. Степенные функции x^{-k-ps} (k=0,1,2,3,...) будем называть *нильпотентными функциями дифференцирования порядка s целочисленной вещественной степени p*.

Теорема. Если последовательно p раз проинтегрировать *нильпотентные функций дифференцирования порядка s степени p* d-оператором порядка s, приняв получающиеся полиномы интегрирования равными нулю в силу их произвольности ($C_s(x)$=0), то получим ряд равенств

$$d^s x : x^{-k-ps} = \frac{\Gamma(-k-ps)}{\Gamma(-k-(p-1)s+1)} x^{-k-(p-1)s};$$

$$d^s x : d^s x : x^{-k-ps} = \frac{\Gamma(-k-ps)}{\Gamma(-k-(p-2)s+1)} x^{-k-(p-2)s};$$

$$...$$

$$\underbrace{d^s x : d^s x : ... \, d^s x}_{n} : x^{-k-ps} = \frac{\Gamma(-k-ps)}{\Gamma(-k)} x^{-k} =$$

$$= \frac{\Gamma(-k-ps)}{\infty} x^{-k} = 0.$$

Из данной теоремы следует равенство для полиномов дифференцирования порядка ps

$$\underbrace{d^s x : d^s x : ... \, d^s x}_{p} : C_{-ps}(x) = d^{ps} x : C_{-ps}(x) = 0.$$

Заметим, что в локальном дробном анализе существуют степенные интегрируемые функции отличные от нуля, базовая первообразная от которых равна нулю. В стандартном анализе степенные функции с такими свойствами не встречаются.

Аналогично можно рассмотреть степенные функции для случая дробного дифференцирования.

Определение. Степенные функции x^{-k+s} (k=1,2,3,...) будем называть *нильпотентными функциями интегрирования комплексного порядка s степени 1*.

Введём и более общие нильпотентные функции интегрирования.

Определение. Степенные функции x^{-k+ps} (k=1,2,3,...) будем называть *нильпотентными функциями интегрирования комплексного порядка s целочисленной вещественно степени p*.

Теорема. Если последовательно p раз продифференцировать *нильпотентные функций интегрирования порядка s степени p* d-оператором порядка s, приняв получающиеся полиномы дифференцирования равными нулю в силу их произвольности ($C_{-s}(x)$=0), то получим ряд равенств

$$d^{-s} x : x^{-k+ps} = \frac{\Gamma(-k+ps)}{\Gamma(-k+(p-1)s+1)} x^{-k+(p-1)s};$$

$$d^{-s} x : d^{-s} x : x^{-k+ps} = \frac{\Gamma(-k+ps)}{\Gamma(-k+(p-2)s+1)} x^{-k+(p-2)s};$$

$$...$$

$$\underbrace{d^{-s} x : d^{-s} x : ... \, d^{-s} x}_{n} : x^{-k+ps} = \frac{\Gamma(-k+ps)}{\Gamma(-k)} x^{-k} =$$

$$= \frac{\Gamma(-k+ps)}{\infty} x^{-k} = 0.$$

Из данной теоремы следует равенство для полиномов интегрирования порядка ps

$$\underbrace{d^{-s} x : d^{-s} x : ... \, d^{-s} x}_{p} : C_{ps}(x) = d^{-ps} x : C_{ps}(x) = 0.$$

Рассмотрим интегрирование ряда полинома дифференцирования для случаев целочисленных порядков m, тогда будет справедливо следующее утверждение.

Теорема. Базовая первообразная целочисленного порядка m=0,1,2,3... от полинома дифференцирования $C_{-m}(x)$ порядка m отлична от нуля

Доказательство.

$$d^m x : C_{-m}(x) = d^m x : \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-m} = C_{-m}^{(-m)}(x) + C_m(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(-k-m+1)}{\Gamma(-k-m+m+1)} x^{-k-m+m} + C_m(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\Gamma(-k-m+1)}{\Gamma(-k+1)} x^{-k} + C_m(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(-1)^m \Gamma(-k+1)}{k(k+1)(k+2)...(k-1+m)} \frac{1}{\Gamma(-k+1)} x^{-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} b_k n^k == \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(-1)^m}{k(k+1)(k+2)...(k-1+m)} x^{-k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} b_k n^k.$$

Здесь

$$b_k = \text{const};\ x \in \mathbb{R};\ s, a_k, b_k \in \mathbb{C};$$
$$s, a_k, b_k = \text{const};\ s \neq 0, 1, 2, 3...$$

Рассмотрим доказательство по-другому, исходя из равенства d-оператора для интегрирования целочисленных порядков степенных функций с отрицательными целочисленными показателями

$$d^m x : x^{-n} = \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x).$$

Здесь

$$m = 0, 1, 2, ...;\ n \in \mathbb{N};\ m < n.$$

Тогда доказывается просто

$$d^m x : x^{-n-m} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m-m-1)!}{(n+m-1)!} x^{m-m-n} + C_m(x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (n-1)!}{(n+m-1)!} x^{m-m-n} + C_m(x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (n-1)!}{(n+m-1)!} x^{-n} + C_m(x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n(n+1)(n+2)...(n+m-1)} x^{-n} + C_m(x).$$

Здесь

$$m = 0, 1, 2, ...;\ n \in \mathbb{N};\ m < n.$$

Очевидно, производная целочисленного порядка m от базовой первообразной того же порядка m в общем случае отлична от нуля

$$d^m x : C_{-m}(x) = C_{-m}^{(-m)}(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(-1)^m}{k(k+1)(k+2)...(k-1+m)} x^{-k} \neq 0.$$

Это значит, что для целочисленных порядков m, включая нулевой порядок, рассматриваемые функции $C_{-m}(x)$ полиномами дифференцирования не являются. В частности, в стандартном анализе, когда порядок равен 1, функции $C_{-1}(x)$ тоже не являются полиномами дифференцирования.

Поэтому для целочисленных порядков полиномы дифференцирования, для удовлетворения равенства $d^m x$: $C_{-m}(x)=0$, необходимо принять равными нулю

$$C_{-m}(x) = 0;\quad m = 1, 2, 3, ...$$

В тривиальном случае дифференцирования порядка 0, что соответствует единичному оператору интегродифференцирования, будем считать, что полином дифференцирования тоже равен нулю

$$C_0(x) = C_{-0}(x) = 0;\quad d^0 x : C_0(x) = \mathbf{1} : C_0(x) = 0.$$

В результате полиномы дифференцирования можем записать для всех рассмотренных случаев

$$C_{-s}(x) = \begin{cases} C_0(x) = 0;\ s = 0; \\ C_{-\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{-k-\alpha};\ s = \alpha;\ \alpha, b_k \in \mathbb{C}; \\ \qquad \alpha, b_k = \text{const};\ s \neq 0, 1, 2, 3, ...; \\ C_{-m}(x) = 0;\ s = m;\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Если полином дифференцирования выразить через дискретную переменную n, пробегающую целочисленные значения ($n \in \mathbb{Z}$), вместо непрерывной переменной x, то получим частный случай полинома дифференцирования

$$C_{-s}(n) = \begin{cases} C_0(n) = 0;\ s = 0; \\ C_{-\alpha}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k n^{-k-\alpha};\ s = \alpha;\ \alpha, b_k \in \mathbb{C}; \\ \qquad \alpha, b_k = \text{const};\ s \neq 0, 1, 2, 3, ...; \\ C_{-m}(n) = 0;\ s = m;\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Дискретный интеграл порядка s от полиномов дифференцирования порядка s будет

$$d^s n : C_{-s}(n) = C_s(n).$$

Если полином интегрирования $C_s(n)$ принять равным нулю, в силу его произвольности, то получим

$$d^s n : C_{-s}(n) = 0.$$

В случае мнимых порядков $i\gamma$ полиномы дифференцирования будут

$$C_{-i\gamma}(x) = \begin{cases} C_0(x) = 0;\ \gamma = 0; \\ C_{-i\gamma}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k-i\gamma}; \\ \gamma \in \mathbb{R};\ \gamma > 0;\ a_k \in \mathbb{C};\ \gamma, a_k = \text{const}. \end{cases}$$

Неопределённый интеграл мнимого порядка $i\gamma$ от полинома дифференцирования того же порядка будет

$$d^{i\gamma} x : C_{-i\gamma}(x) = C_{i\gamma}(x).$$

Если полином интегрирования $C_{i\gamma}(x)$ приравнять к нулю, то будет

$$d^{i\gamma} x : C_{-i\gamma}(x) = 0.$$

Существование полиномов дифференцирования говорит о том, что операция дифференцирования нецелочисленных порядков может оказаться такой же неоднозначной, т. е. с точностью до сложения с полиномами дифференцирования, как неоднозначна операция интегрирования с точностью до сложения с полиномами интегрирования, что можно записать

$$d^{-s} x : f(x) = f^{(s)}(x) + C_{-s}(x).$$

Неопределённый интеграл порядка s от полученной функции будет

$$d^s x:(f^{(s)}(x)+C_{-s}(x))=$$
$$=(f^{(s)}(x)+C_{-s}(x))^{(s)}+C_s(x)=$$
$$=f^{(s-s)}(x)+C_{-s}^s(x)+C_s(x)=f(x)+C_s(x).$$

Если вначале проинтегрировать функцию, получим

$$d^s x:f(x)=F^{(s)}(x)+C_s(x).$$

Последующее дифференцирование даёт

$$d^{-s}x:(F^{(s)}(x)+C_s(x))=$$
$$=(F^{(s)}(x)+C_s(x))^{(s)}+C_{-s}(x)=$$
$$=F^{(s-s)}(x)+C_s^{(s)}(x)+C_{-s}(x)=$$
$$=F^{(0)}(x)+C_{-s}(x)=f(x)+C_{-s}(x).$$

Тогда легко получить коммутационные соотношения

$$[d^s x;d^{-s}x]:f(x)=(d^s x:d^{-s}x-d^{-s}x:d^s x)f(x)=$$
$$=d^s x:d^{-s}x:f(x)-d^{-s}x:d^s x:f(x)=$$
$$=f(x)+C_s(x)-f(x)+C_{-s}(x)=C_s(x)-C_{-s}(x).$$

Здесь $[d^s x;d^{-s}x]$ – коммутатор.

При перестановке операторов в коммутаторе получим обратное коммутационное соотношение

$$[d^{-s}x;d^s x]:f(x)=-[d^s x;d^{-s}x]:f(x)=$$
$$=d^{-s}x:d^s x:f(x)-d^s x:d^{-s}x:f(x)=$$
$$=f(x)+C_{-s}(x)-f(x)+C_s(x)=C_{-s}(x)-C_s(x).$$

Полиномы интегрирования [3, 4] и полиномы дифференцирования можно для удобства объединить в одну функцию.

Определение. *Полиномом интегродифференцирования комплексного порядка s* будем называть функцию $C_{\pm s}(x)$, задаваемую равенствами

$$C_{\mp s}(x)=\begin{cases} C_\alpha(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^{-k+\alpha};\ s=\alpha;\ a_k\in\mathbb{C};\\ \quad \alpha,a_k=\mathrm{const};\ \alpha\neq 1,2,3,4...;\\ \quad \alpha=\chi+i\gamma\wedge\alpha=\pm\chi\mp i\gamma;\\ \quad \chi,\gamma\in\mathbb{R};\ \chi,\gamma=\mathrm{const};\ \chi,\gamma\geq 0;\\ C_m(x)=\sum\limits_{k=0}^{m-1}a_k x^k;\ s=m;\ a_k=\mathrm{const};\ m\in\mathbb{N};\\ C_0(x)=0;\ s=0;\\ C_{-\alpha}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k x^{-k-\alpha};\ s=\alpha;\ b_k\in\mathbb{C};\\ \quad \alpha,b_k=\mathrm{const};\ \alpha\neq 0,1,2,3,...;\\ \quad \alpha=\chi+i\gamma\wedge\alpha=\pm\chi\mp i\gamma;\\ \quad \chi,\gamma\in\mathbb{R};\ \chi,\gamma=\mathrm{const};\ \chi,\gamma\geq 0;\\ C_{-m}(x)=0;\ s=m;\ m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Если перед значением порядка s у полинома интегродифференцирования стоит знак плюс, то это соответствует полиному интегрирования порядка s (первые два равенства), а когда знак минус, то это соответствует полиному дифференцирования порядка s, (четвёртое и пятое равенства). В случае порядка s, равного нулю, полиномы дифференцирования и полиномы интегрирования совпадают и равны нулю (третье равенство).

Константы a_k и b_k являются соответственно неопределёнными *константами интегрирования* и *константами дифференцирования*. Поэтому полиномы интегродифференцирвания являются произвольными функциями в том же смысле, что и константы интегрирования в стандартном анализе.

В случае целочисленных порядков, включая стандартный анализа (порядок s=1), отсутствуют полиномы дифференцирования, поэтому они в этих случаях были приравнены к нулю.

В дробном анализе целочисленных порядков, и в частности в стандартном анализе, отсутствуют полиномы дифференцирования, которые для целочисленных порядков, включая нулевой, были приравнены к нулю.

В локальном дробном анализе в общем случае производная комплексного порядка s от функции $f(x)$ будет

$$d^{-s}x:f(x)=f^{(s)}(x)+C_{-s}(x)=F^{(-s)}(x)+C_{-s}(x).$$

Здесь функцию $f^{(s)}(x)\equiv F^{(-s)}(x)$ будем называть *базовой производной прядка s* функции $f(x)$. Другими словами, базовая производная – это такая производная, у которой полином дифференцирования равен нулю.

Неопределённый интеграл в локальном дробном анализе комплексного порядка s от функции $f(x)$ в общем случае будет

$$d^s x:f(x)=F^{(s)}(x)+C_s(x)=f^{(-s)}(x)+C_s(x).$$

Здесь функция $F^{(s)}(x)\equiv f^{(-s)}(x)$ является *базовой первообразной прядка s* функции $f(x)$.

Общую объединённую формулу дробного интегродифференцирования прядка s функции $f(x)$ можно записать

$$d^{\pm s}x:f(x)=f^{(\mp s)}(x)+C_{\pm s}(x)=F^{(\pm s)}(x)+C_{\pm s}(x).$$

В частности, при интегродифференцировании порядка s произвольных полиномов интегродифференцирования $C_{\pm s}(x)$ и $\tilde{C}_{\mp s}(x)$ будут выполняться равенства

$$d^{\mp s}x:C_{\pm s}(x)=\tilde{C}_{\mp s}(x).$$

Расписав данное соотношение в виде двух равенств, получим

$$d^{-s}x:C_s(x)=\tilde{C}_{-s}(x);$$
$$d^s x:C_{-s}(x)=\tilde{C}_s(x).$$

Если полиномы интегродифференцирования, в силу их произвольности, приравнять к нулю (*приближение нулевого полинома интегродифферинцирования*), $\tilde{C}_{+s}(x)=\tilde{C}_{-s}(x)=0$, то будут справедливы равенства

$$d^{\mp s}x:C_{\pm s}(x)=0.$$

Или в виде двух равенств

$$d^{-s}x : C_s(x) = 0;$$
$$d^{s}x : C_{-s}(x) = 0.$$

Из этих соотношений следует важное утверждение.

Теорема. Базовая производная порядка s от полиномов интегрирования порядка s и базовая первообразная порядка s от полиномов дифференцирования порядка s равны нулю.

Доказательство. Второе и третье равенства выполняются по определению.

$$d^0 x : C_0(x) = 0; \quad d^m x : C_{-m}(x) = 0; \quad m \in \mathbb{N}.$$

Первое и четвёртое равенства легко доказываются

$$d^{\pm\alpha} x : C_{\mp\alpha}(x) = d^{\pm\alpha} x : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k\mp\alpha} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(-k \mp \alpha + 1)}{\Gamma(-k \mp \alpha \pm \alpha + 1)} x^{-k\mp\alpha\pm\alpha} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(-k \mp \alpha + 1)}{\infty} x^{-k} = 0;$$
$$-k \mp \alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$$

Доказательство пятого равенства следующее

$$d^{-m} x : C_m(x) = d^{-m} x : \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-m+1)} x^{k-m} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k+1)}{\infty} x^{k-m} = 0; k = 0, 1, 2, \ldots m-1.$$

В частном случае можно приравнять к нулю полиномы дифференцирования, в силу их произвольности, $\tilde{C}_{-s}(x)=0$ (*приближение нулевого полинома дифференцирования*); тогда получим соотношения больше соответствующие стандартному анализу

$$d^{-s}x : C_s(x) = 0;$$
$$d^{s}x : 0 = \tilde{C}_s(x).$$

Аналогично если приравнять к нулю уже полиномы интегрирования, $\tilde{C}_{+s}(x)=0$, в силу их произвольности, будут выполняться равенства

$$d^{-s}x : 0 = \tilde{C}_{-s}(x);$$
$$d^{s}x : C_{-s}(x) = 0.$$

Такое приближение назовём *приближением нулевого полинома интегрирования*, которое не является привычным, но в локальном дробном анализе оно вполне возможно.

Вывод

Полиномы интегродифференцирования делают операции интегрирования и дифференцирования неоднозначными в локальном дробном анализе для всех порядков за исключением интегродифференцирования нулевого порядка и дифференцирования целочисленных порядков, включая порядок 1, соответствующий стандартному анализу.

Полиномы интегрирования в локальном дробном анализе переходят в константы интегрирования в стандартном анализе. Что касается роли полиномов интегрирования в локальном дробном анализе и в его приложениях, то она аналогична роли констант интегрирования в стандартном анализе. Вопрос о возможном применении полиномов дифференцирования в самой математике и в приложениях не совсем ясен и требует более глубокого исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
2. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 118 с.
3. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.
4. Чуриков В.А. Локальный d-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 5–10.

Поступила 23.01.2013 г.