

УДК 553.988
DOI: 10.18799/24131830/2025/4/4985
Шифр специальности ВАК: 25.00.17

Определение поверхностного натяжения на основе термокапиллярного движения

А.А. Филипас, А.В. Кучман, А.Ю. Зарницын, Ю.Н. Исаев[✉]

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Россия, г. Томск

[✉]isaev_yusup@mail.ru

Аннотация. Актуальность. Исследование свойств водомасляных эмульсий, в частности дисперсного состава, вязкости и поверхностного натяжения, имеет большое значение для оптимизации производственных процессов и повышения качества продукции в различных отраслях промышленности, включая пищевую, фармацевтическую, косметическую и нефтяную. В предыдущей работе авторы выявили зависимость собственной частоты колебаний шаровой капли водомасляной эмульсии от её радиуса, плотности и поверхностного натяжения. Однако вопрос оценки последнего параметра остался открытым, поскольку существующие методы имеют ряд недостатков. Вывод аналитического выражения для оценки поверхностного натяжения дисперсной фазы водомасляной эмульсии позволит более точно определять свойства эмульсий и разрабатывать новые эффективные методы их изучения. **Цель:** заключается в получении аналитического выражения для оценки поверхностного натяжения и вязкости дисперсной фазы водомасляной эмульсии на основе термокапиллярных явлений и использования поверхностно-активных веществ. **Объект:** водомасляная эмульсия. **Методы.** Для получения аналитических выражений гидродинамические уравнения в частных производных преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения с краевыми условиями. В стационарном случае гидродинамические уравнения преобразуются в уравнение Лапласа, для решения которого используется метод разделения переменных. **Результаты.** Авторам удалось получить оценочную формулу скорости распространения поверхностного слоя эмульсии. Полученная формула позволяет определить температурный коэффициент поверхностного натяжения. Авторам также удалось свести уравнения гидродинамики в обыкновенные дифференциальные уравнения с краевыми условиями. Получена аналитическая формула, позволяющая оценить вязкость эмульсии. В статье выводится формула, позволяющая оценить поверхностное натяжение через скорость фронта волны с использованием поверхностно-активного вещества, находящегося на поверхности эмульсии.

Ключевые слова: поверхностное натяжение, температурный коэффициент поверхностного натяжения, температурный градиент, уравнение Навье–Стокса, метод разделения переменных

Для цитирования: Определение поверхностного натяжения на основе термокапиллярного движения / А.А. Филипас, А.В. Кучман, А.Ю. Зарницын, Ю.Н. Исаев // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2025. – Т. 336. – № 4. – С. 179–188. DOI: 10.18799/24131830/2025/4/4985

UDC 553.988
DOI: 10.18799/24131830/2025/4/4985

Determination of surface tension based on thermocapillary motion

A.A. Filipas, A.V. Kuchman, A.Yu. Zarnitsyn, Yu.N. Isaev[✉]

National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

[✉]isaev_yusup@mail.ru

Abstract. Relevance. Research of the properties of oil-in-water emulsions, in particular their dispersed composition, viscosity, and surface tension, is of great importance for optimizing production processes and improving product quality in various industries, including food, pharmaceutical, cosmetic, and petroleum. In a previous work, the authors identified the dependence of the natural frequency of oscillations of an oil-in-water emulsion spherical droplet on its radius, density, and surface tension. However,

er, the issue of estimating this last parameter has not been resolved, since existing methods have several disadvantages. The derivation of an analytical expression for assessing the surface tension of the dispersed phase of an oil-in-water emulsion will allow for more accurate determination of emulsion properties and the development of new effective methods for studying them.

Aim. To obtain an analytical expression for assessing the surface tension and viscosity of the dispersed phase of an oil-in-water emulsion based on thermo-capillary phenomena and the use of surfactants. **Object.** Water-in-oil emulsion **Methods.** To obtain analytical expressions, the hydrodynamic partial differential equations are transformed into ordinary differential equations with boundary conditions. In the stationary case, the hydrodynamic equations are converted into the Laplace equation, for which the method of separation of variables is used to find a solution. **Results.** The authors were able to derive an estimated formula for the propagation velocity of the emulsion surface layer. This formula allows determining the temperature coefficient of surface tension. The authors also succeeded in reducing hydrodynamic equations to ordinary differential equations with boundary conditions. An analytical formula was obtained that allows estimating the viscosity of the emulsion. The article derives a formula that makes it possible to estimate surface tension through wave front velocity using a surfactant on the emulsion surface.

Keywords: surface tension, surface tension temperature coefficient, temperature gradient, Navier–Stokes equation, method of separation of variables

For citation: Filipas A.A., Kuchman A.V., Zarnitsyn A.Yu., Isaev Yu.N. Determination of surface tension based on thermocapillary motion. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2025, vol. 336, no. 4, pp. 179–188. DOI: 10.18799/24131830/2025/4/4985

Введение

Водомасляные эмульсии широко применяются в пищевой и сельскохозяйственной промышленности, фармацевтике, косметической сфере, нефтяной промышленности и являются основой многих промышленных продуктов [1–3]. Для оценки свойств эмульсий существует несколько характеристик, основными из которых являются концентрация дисперсной фазы, устойчивость по времени и дисперсный состав. Дисперсный состав – это характеристика дисперсной системы, описывающая распределение частиц дисперсной фазы по размерам. Это распределение влияет на такие свойства эмульсий, как стабильность дисперсной фазы, поведение при хранении, эффективность активных компонентов эмульсий и кинетику расслоения [4, 5].

Управление дисперсным составом можно разделить на три направления: синтез эмульсии с заданными размерами капель, разрушение эмульсии – укрупнение капель и переход в сплошную среду, и поддержание текущих размеров капель [6]. Одним из универсальных способов для управления дисперсным составом является использование акустического воздействия с различной частотой, которая будет зависеть от резонансной частоты дисперсной фазы водомасляной эмульсии.

В [7] авторами была выявлена зависимость собственной частоты шаровой капли эмульсии от её радиуса, плотности и поверхностного натяжения. Плотность жидкости, из которой состоит дисперсная фаза, является известной величиной, для оценки размеров авторами используется оптический метод, реализованный на основе компьютерного зрения, но вопрос оценки поверхностного натяжения остался открытым. Существует несколько способов, однако все они имеют ряд недостатков, таких как технические сложности в реализации, требование высокоточного оборудования или низкая точность.

Целью данной статьи является получение аналитического выражения для оценки поверхностного натяжения дисперсной фазы водомасляной эмульсии.

Вывод формулы для оценки температурного коэффициента поверхностного натяжения

Известно, что поверхностное натяжение зависит от температуры. Эта зависимость имеет линейный характер [6–10]. Температурный коэффициент $\partial\sigma/\partial T$, связывающий поверхностное натяжение и температуру, имеет отрицательное значение. Это означает, что при увеличении температуры уменьшается поверхностное натяжение. В слабо прогретых местах поверхности жидкости поверхностное натяжение будет выше, чем в местах более прогретых. Поэтому если поверхность жидкости прогрета неравномерно, происходит перераспределение поверхностного натяжения. Поверхностное натяжение определяется соотношением (1):

$$\sigma(T) = \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) T + \sigma_0, \quad \sigma_0 = \sigma(0). \quad (1)$$

При наличии градиента температуры в жидкости на поверхности жидкости возникают тангенциальные напряжения, вызванные градиентом поверхностного натяжения. То есть возникает тангенциальная сила, направленная от мест с меньшим к местам с большим поверхностным натяжением:

$$p = \nabla \sigma = \mathbf{i} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \sigma}{\partial z}. \quad (2)$$

В свою очередь градиент поверхностного натяжения вызван градиентом температуры:

$$\nabla \sigma = \frac{d\sigma}{dT} \cdot \nabla T. \quad (3)$$

При нагревании жидкости в ней возникают конвективные тепловые потоки, а в приграничных зонах жидкости возникает еще и поверхностная конвекция, вызванная явлениями поверхностного натяжения. Если на поверхности жидкости присутствуют активные вещества, то концентрация активных веществ на поверхности может вызывать дополнительные тангенциальные напряжения.

Из вышесказанного следует, что можно создать такие условия в приграничном к поверхности слое жидкости, при которых определяющим фактором в формировании тангенциального напряжения будет градиент поверхностного натяжения. Из формулы (2), (3) следует, что при известном тангенциальном напряжении и известном градиенте температуры можно восстановить температурный коэффициент поверхностного натяжения. По температурному коэффициенту $d\sigma/dT$ можно определить поверхностное натяжение. Приведем условия, при которых определяющим фактором в формировании поверхностного напряжения жидкости будет градиент поверхностного натяжения. Конвективные тепловые потоки в жидкости циркулируют в глубине, в слоях далеких от поверхности, следовательно, нужно выбрать неглубокий слой жидкости с неравномерным нагревом, который приведет к стационарному движению. Движение потока жидкости определяется вязкостью жидкости, поэтому нужно получить оценку, связывающую приграничную высоту слоя жидкости с её кинематической вязкостью, скоростью и характерным продольным масштабом. Эта оценка имеет вид [11, 12]:

$$h^2 < \frac{\nu L}{V}, \quad (4)$$

где h – высота слоя жидкости, м; ν – кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$; V – скорость движения поверхностного слоя, $\text{м}/\text{с}$; L – характерный продольный масштаб, м.

Поместим исследуемую жидкость в тонкую кювету высотой $y=h$ и длиной $x=L$.

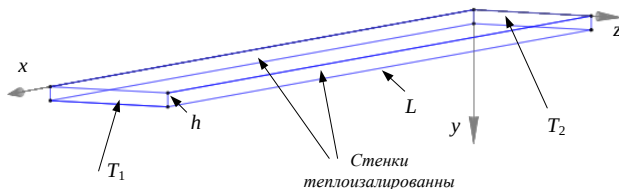


Рис 1. Тонкая кювета высотой h , длиной L . Противоположные стенки имеют температуру T_1 и T_2 . Боковые стенки теплоизолированы

Fig 1. Thin cuvette with a height h and length L . The opposite walls have temperatures T_1 and T_2 . The side walls are thermally insulated

Из-за малой глубины кюветы будем пренебрегать тепловым конвективным размешиванием и считать тепловой градиент постоянным вдоль кюветы. Такая модель кюветы будет оправдана, если выполняется условие (4). Это означает, что поверхность достаточно велика по отношению к объему. В этом случае поверхностные эффекты преобладают над объемными эффектами. Будем учитывать, что влияние z -компоненты отсутствует. Это допустимо если ширина кюветы достаточно велика.

Считая температурный градиент постоянным, запишем выражение для поверхностного натяжения в виде (5):

$$\sigma(T) = \sigma(T_1) + \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) \frac{T_2 - T_1}{L}. \quad (5)$$

В соответствии с (2) на квадратный метр поверхности будет действовать сила – поверхностное напряжение:

$$\mathbf{p}_\tau = \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) \nabla(T). \quad (6)$$

Определим эту силу в соответствии с конфигурацией кюветы. В соответствии с рис. 1 градиент температуры направлен вдоль кюветы – вдоль оси x . Поскольку отсутствует температурная конвекция, в гидродинамических уравнениях можно сделать существенные упрощения [11, 12]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

где p – давление, Па; μ – вязкость жидкости, Па·с; V_x – компонента скорости, $\text{м}/\text{с}$.

На нижнем основании кюветы скорость равна нулю:

$$V_x(x, h) = 0, \quad (8)$$

а на поверхности $V_x(x, 0)$.

Значение скорости V_x медленно меняется в продольном направлении вдоль оси x по сравнению с поперечным направлением вдоль оси y . По этой причине в уравнении (7) можно пренебречь производной $\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}$ и записать (9):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}. \quad (9)$$

Так как кювета не глубокая, давление вдоль высоты измениться не успевает, и его можно положить постоянным, что является следствием выражения $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

Дополним (9) уравнением непрерывности, означая, что циркуляция скорости равняется:

$$\int_0^h V_x dy = 0. \quad (10)$$

Используя условия непрерывности касательной составляющей тензора напряжения и вязкого напряжения на поверхности жидкости, можно записать выражение (11)

$$p_T = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y}. \quad (11)$$

С учетом уравнения (6) и конфигурации кюветы получаем:

$$\mu \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \nabla T = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dx}. \quad (12)$$

Проинтегрируем уравнение (8):

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \int \frac{\partial p}{\partial x} dy \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + C_1. \end{aligned}$$

При повторном интегрировании получаем параболическую зависимость скорости:

$$V_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2. \quad (13)$$

Для определения констант интегрирования будем использовать граничные условия (8) и (12). Проинтегрируем (13) и подставим в место y ноль, найдем константу интегрирования C_1 :

$$C_1 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (14)$$

Подставим в (13) $y=h$, и с учетом (14) получим:

$$C_2 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} h.$$

Теперь можно записать выражение для скорости:

$$V_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} y - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} h,$$

или после группировки соответствующих слагаемых получаем:

$$V_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} (h-y) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{(h^2 - y^2)}{2}. \quad (15)$$

Подставим последнее уравнение в уравнение непрерывности (10) и получим (16):

$$\begin{aligned} \int_0^h \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} (h-y) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{(h^2 - y^2)}{2} \right) dx = 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \left(h^3 - \frac{h^3}{3} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3}{2h} \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (16) \end{aligned}$$

Таким образом, получаем зависимость давления от поверхностного натяжения в виде (17):

$$p(x) = p_0 + \frac{3}{2h} (\sigma(x) - \sigma(0)). \quad (17)$$

Наконец, подставив в уравнение для скорости (15), получаем:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} (h-y) - \frac{1}{\mu} \frac{3}{2h} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{(h^2 - y^2)}{2} = \\ &= \frac{1}{4\mu h} \frac{\partial \sigma}{\partial x} (4h(h-y) - 3(h^2 - y^2)). \end{aligned}$$

С учетом температурного градиента и температурного коэффициента получаем (18):

$$V_x = \frac{1}{4\mu h} \frac{\partial \sigma}{\partial T} (h^2 - 4hy + 3y^2) \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (18)$$

Максимальная скорость на свободной поверхности воды будет при значениях $y=0$

$$V_{x \max} = V_x \Big|_{y=0} = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot h \cdot \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (19)$$

Неравенство (4) с учетом кинематической вязкости $\nu = \mu/\rho$ и выражения (19) переходит в неравенство (20) [10, 11]:

$$h^2 < \frac{\nu L}{V} \rightarrow h^3 < \frac{4\rho \nu^2 L}{\left| \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right| \cdot \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|}. \quad (20)$$

Приведем оценки скоростей на свободной поверхности некоторых жидкостей. Например, для воды при температурном коэффициенте поверхностного натяжения, равном $\partial \sigma / \partial T = -0,15$ эрг/см²·град, толщине кюветы $h=0,03$ см, температурном градиенте равном $\Delta T=0,1$ град/см и вязкостью $\mu=10^{-4}$ см²/с получаем оценку скорости, равной $V=0,1$ см/с

$$V = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot h \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \sim \frac{1}{4 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,15 \cdot 0,03 \cdot 0,1 \sim 0,1.$$

Из последней формулы можно определить температурный коэффициент поверхностного натяжения при известной скорости жидкости, глубине жидкости, температурном градиенте и вязкости:

$$\frac{d\sigma}{dT} = -\frac{V 4\mu}{h \cdot \partial T / \partial x}.$$

Определение вязкости с помощью поверхностно-активных веществ

Исследуемая жидкость, покрытая монослоем поверхностно-активного вещества, помещается в прямоугольный двухмерный капилляр (кювету) длины L . На краях капилляра создается разность давлений Δp , при этом движение жидкости сопровождается диссипацией энергии. Поскольку объем

жидкости велик по сравнению с объемом пленки, диссипация энергии в пленке пренебрежимо мала. Вычислим в этих условиях расход жидкости, протекающей через капилляр, как функцию перепада двумерного давления Δp , габаритов капилляра и вязкости жидкости. Движение жидкости будем считать медленным и стационарным, так что режим движения будет вязким.

Расположим плоскую систему координат x, y в сечении капилляра так, чтобы центр системы координат находился в центре поверхности жидкости, и направим ось x по ширине сечения капилляра, а ось y – в глубину сечения капилляра. Ширина капилляра равна $2l$, а глубина капилляра равна h . Тогда уравнение движения жидкости будет записано в виде (21):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (21)$$

Будем решать уравнение Лапласа методом разделения переменных [13, 14] с краевыми условиями:

$$V(x, 0) = 0, \quad V(-l, y) = V(l, y) = 0. \quad (22)$$

Представим решение в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одного аргумента $V(x, y) = V_x(x)V_y(y)$. Подставляя решение в исходное уравнение и разделяя переменные, получаем систему уравнений (23):

$$\begin{aligned} V_y \frac{d^2 V_x}{dx^2} + V_x \frac{d^2 V_y}{dy^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{V_x} \frac{d^2 V_x}{dx^2} = \\ = -\frac{1}{V_y} \frac{d^2 V_y}{dy^2} = k^2 \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 V_x}{dx^2} + k^2 V_x = 0; \\ \frac{d^2 V_y}{dy^2} - k^2 V_y = 0. \end{cases} \quad (23) \end{aligned}$$

Первое уравнение системы дает решение в виде суммы двух функций синуса и косинуса:

$$V_x = A_1 \sin(kx) + A_2 \cos(kx). \quad (24)$$

Второе уравнение системы дает решение в виде суммы гиперболических синусов и косинусов:

$$V_y = B_1 \operatorname{sh}(ky) + B_2 \operatorname{ch}(ky). \quad (25)$$

Далее определим константы интегрирования в решении (24). Для этого будем использовать краевые условия (22). Из краевых условий ясно, что функция должна быть четной, следовательно, константа $A_1 = 0$. Подставляем граничные условия и получаем собственные функции и собственные числа задачи по координате x :

$$\begin{aligned} V_x(L) = A_2 \cos(kl) = 0 \rightarrow k = \frac{2n+1}{l} \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ V_{xn}(x) = A_n \cos\left(\frac{2n+1}{l} x\right). \end{aligned}$$

Далее определяем коэффициенты второго решения (25). В соответствии с краевыми условиями и собственными числами получаем собственные функции по координате y :

$$V_{yn}(y) = B_n \operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{l} \frac{\pi}{2} y\right).$$

Запишем решение в виде суммы ряда по собственным функциям:

$$V(x, y) = \sum_{n=0}^N C_n \cos\left(\frac{2n+1}{2l} \pi x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi y\right). \quad (26)$$

Здесь коэффициент разложения C_n есть произведение A_n и B_n , и введено ограничение на число членов разложения ряда.

Граничным условием на поверхности жидкости служит равенство тангенциальной составляющей тензора натяжений в жидкости силе растяжения, действующей в пленке. Будем считать, что к поверхности приложено равномерное давление Δp , тогда давление, приходящееся на единицу длины канала, будет равно:

$$f = \Delta p / L,$$

где L – длина канала, м.

Граничное условие на границе поверхности жидкости:

$$f = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \Big|_{y=h}. \quad (27)$$

Учитывая последнее соотношение, можно получить коэффициенты разложения ряда (26). Продифференцируем разложение (26) и поставим значения y на поверхности жидкости. Из условия (27) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{f}{\mu} = \\ = \frac{\pi}{2l} \sum_{n=0}^N C_n (2n+1) \cos\left(\frac{2n+1}{2l} \pi x\right) \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi h\right). \end{aligned}$$

Пользуясь свойством ортогональности собственных функций по продольной координате x , получаем выражение для коэффициента разложения C_n :

$$C_n = \frac{8fl}{\mu\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi h\right)}.$$

Можно окончательно записать разложение в виде (28):

$$V(x, y) = \frac{8fl}{\mu\pi^2} \sum_{n=0}^N \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi h\right)} \times \cos\left(\frac{2n+1}{2l} \pi x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi y\right) \right]. \quad (28)$$

Графическое представление для распределения скорости в поперечном сечении канала в относительных величинах, когда все величины входящие в выражения (28), кроме переменных x и y принимаются равными единице, и представлено на рис. 2.

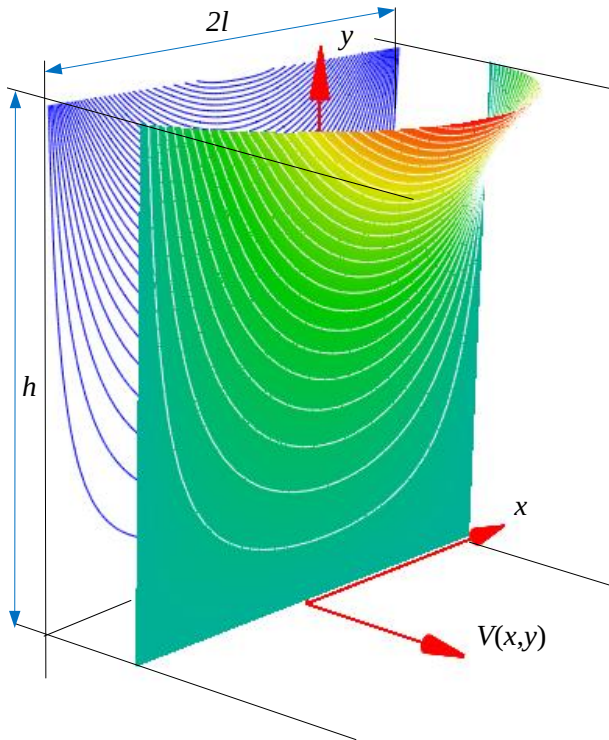


Рис. 2. Преувеличенная в масштабе картина распределения скоростей в поперечном сечении прямоугольного капилляра, рассчитанная по формуле (28)

Fig. 2. Picture of the velocity distribution in the cross section of a rectangular capillary, calculated using formula (28), exaggerated for scale

Количество жидкости, вытекающей через линейное сечение капилляра в секунду, определяется выражением (29):

$$Q(y) = \int_{-l}^l v dx = \frac{32 fl^2}{\mu \pi^2} \sum_{n=0}^N \frac{\text{sh}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi y\right)}{(2n+1)^2 \text{ch}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi h\right)}. \quad (29)$$

В частности, если вместо y подставить h , получится расход пленки через линейное сечение:

$$Q(h) = \frac{32 fl^2}{\mu \pi^2} \sum_{n=0}^N \frac{\text{th}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi h\right)}{(2n+1)^2}.$$

Если проинтегрировать (29) по оси y , получим выражение (30) для всего количества жидкости, вытекающей через поперечное сечение капилляра:

$$P = \int_0^h Q(y) dy = \frac{64 fl^3}{\mu \pi^4} \sum_{n=0}^N \frac{\text{ch}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi h\right) - 1}{(2n+1)^4 \text{ch}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi h\right)}. \quad (30)$$

Если глубина капилляра h превышает ширину $2l$, можно записать в виде (31):

$$P = \frac{2}{3} \frac{fl^3}{\mu} = \frac{2}{3} \frac{\Delta p l^3}{\mu L}. \quad (31)$$

Из последнего соотношения можно определить вязкость выражением (32):

$$\mu = \frac{2}{3} \frac{\Delta p l^3}{PL}. \quad (32)$$

Оценочный метод измерения поверхностного натяжения эмульсий с помощью поверхностно-активных веществ

Поверхностно-активные вещества (ПАВ) обладают способностью существенно снижать поверхностное натяжение. Если поместить ПАВ на эмульсию, мгновенно происходит процесс снижения поверхностного натяжения. Если считать, что ПАВ снижают поверхностное натяжение до очень маленькой величины, то разность между поверхностным натяжением эмульсии и области с ПАВ можно приближенно считать равным поверхностному натяжению эмульсии. Обозначим эту разность величиной $\Delta\sigma$.

Предположим, что на эмульсию нанесено ПАВ. В радиальном направлении образуется расходящийся круг радиуса R . При этом полная сила F , растягивающая круговую область, будет определяться величиной, пропорциональной поверхностному натяжению $\Delta\sigma$:

$$F = 2\pi R \Delta\sigma. \quad (33)$$

Распространяющаяся область будет испытывать сопротивление. Будем считать распространяющуюся область несжимаемой пленкой – твердой пластиной. При этом скольжение пленки увлекает за собой вязкую жидкость и испытывает сопротивление вязкого трения. Силы вязкого трения, действующие на пленку, можно считать силами, действующими на твердую пластину.

Для дальнейших рассуждений рассмотрим пограничный слой, который играет существенную роль в движении жидкости. Явления, происходящие в приграничной области, играют существенную роль в физико-химической гидродинамике. Эти явления являются источником гидродинамических сопротивлений.

Будем рассматривать движение в пограничном слое. При таком допущении гидродинамические уравнения существенно упрощаются, потому что

скорость изменения всех величин в поперечном направлении вдоль оси y к стенке существенно выше, чем их изменение в продольном направлении вдоль оси x (рис. 6).

Вторая производная продольной компоненты скорости жидкости по продольной координате $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ существенно ниже производной по поперечной координате: $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} > \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$. Также выполняются нера-

венства $v_x > v_y$, $\frac{\partial v_y}{\partial x} > \frac{\partial v_x}{\partial x}$. Вследствие этого можно записать уравнение гидродинамики в пограничном слое [11, 12, 14]:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}. \quad (34)$$

Выражение для компоненты v_y поперечной компоненты вырождается в уравнение вида:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Это уравнение показывает, что в приграничном слое давление не успевает измениться в поперечном направлении. И, следовательно, давление от продольной координаты определяется интегралом Бернулли, поэтому величиной $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ в (34) можно пренебречь.

Запишем граничные условия для уравнения (34) в виде (35), (36)

$$v_x = v_y = 0 \text{ при } y=0, \quad (35)$$

$$v_x = U_0 \text{ при } y=\infty. \quad (36)$$

Введем вспомогательную переменную – функцию тока, которая является следствием уравнения непрерывности и получим (37) [11–13]:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (37)$$

Сведем уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению с краевыми условиями с помощью подстановки:

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \cdot y. \quad (38)$$

И будем искать вспомогательную функцию тока в виде:

$$\psi = \frac{1}{2} \sqrt{\nu U_0 x} \cdot f(\eta). \quad (39)$$

Тогда компоненты скоростей и их производные могут быть записаны в виде (40):

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2} U_0 f'(\eta), \\ v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \cdot \eta f' - f, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{4} \frac{U_0}{x} \eta f'', \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U_0}{4} \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} f'', \\ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} &= \frac{U_0}{8} \frac{\nu U_0}{x} f'''. \end{aligned} \quad (40)$$

После подстановки получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} f'''(\eta) + f''(\eta) f'(\eta) &= 0, \\ f &= f' = 0 \text{ при } \eta = 0, \\ f'(\eta) &= 2 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (41)$$

Решение уравнения (41) приведено в виде сплошной линии на рис. 3.

Если вести обозначение $f'(0) = \alpha$, то несложно с помощью (41) получить разложение в ряд Тейлора функции $f(\eta)$, учитывая, что в начальной точке $f(0) = f'(0) = 0$ [11, 15]:

$$f(\eta) = \frac{\alpha \eta^2}{2!} - \frac{\alpha^2 \eta^5}{5!} + \frac{11\alpha^3 \eta^8}{8!}. \quad (42)$$

С использованием программы Mathcad [16, 17] численно решим дифференциальное уравнение (41) методом стрельбы [18]. В результате решения получаем графическую зависимость $f(\eta)$. При дальнейшем преобразовании функции $f(\eta)$ авторы использовали аппроксимацию кубическими сплайнами [18–20].

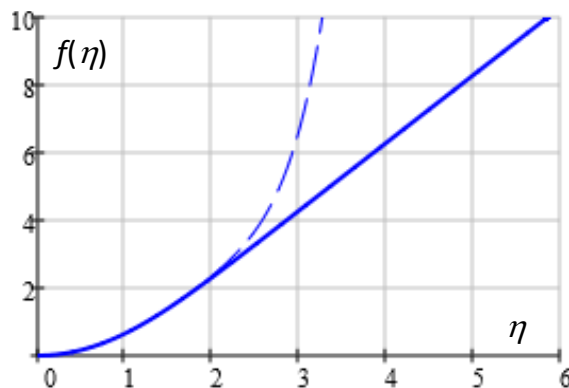


Рис. 3. Пунктирная кривая – разложение в ряд Тейлора по формуле (42). Сплошная кривая – численное решение уравнения (41)

Fig. 3. Dotted curve is a Taylor series expansion (42). Solid curve is the numerical solution of equation (41)

Теперь можно определить компоненты скоростей и их производных, а также оценить величину приграничного слоя.

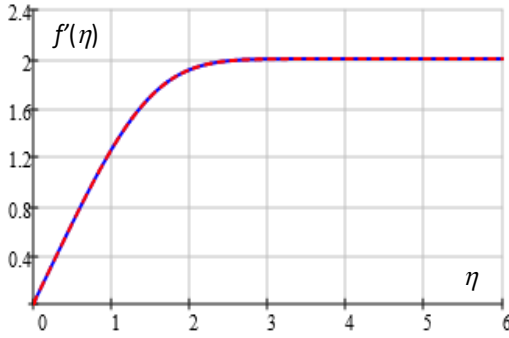


Рис. 4. Первая производная функции $f(\eta)$ и производная сплайна функции $f(\eta)$

Fig. 4. First derivative of the function $f(\eta)$ and the derivative of the spline function $f(\eta)$

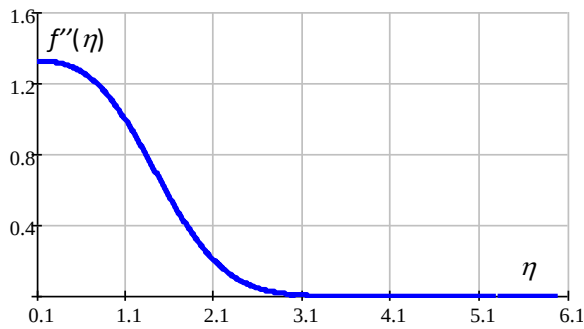


Рис. 5. Вторая производная функции $f(\eta)$. Значение функции в начальной точке равно $f''(0)=\alpha=1,33$

Fig. 5. Second derivative of the function $f(\eta)$. The value of the function at the initial point is $f''(0)=\alpha=1,33$

С учетом полученных данных можно переписать разложение (42) в виде (43):

$$f(\eta) = \frac{1,33\eta^2}{4} - \frac{1,77\eta^5}{120} + \frac{14,63\eta^8}{40320}. \quad (43)$$

Разложение (43) приведено в виде пунктирной кривой на рис. 3. На рис. 4, 5 изображены первая и вторая производные функции $f(\eta)$, соответственно.

Если выбрать величину пограничного слоя из условия, что продольная компонента скорости на таком удалении от пластины достигает 99 % от своего установившегося значения, то в соответствии с формулами (39) и графиком, изображенным на рис. 6, эта величина определяется выражением (44):

$$\delta_0 = 5,2\sqrt{\nu x / U_0}. \quad (44)$$

А компоненты скорости соответственно записываются в виде (45) и (46):

$$v_x = \frac{U_0}{2} (\alpha\eta - \alpha^2\eta^4 / 4! + \dots) \approx \frac{U_0}{\delta_0} y, \quad (45)$$

$$v_y = \frac{\alpha}{4} \sqrt{\frac{U_0 \nu}{\alpha}} \eta^2 \approx \frac{\nu}{\delta_0^3} y^2. \quad (46)$$

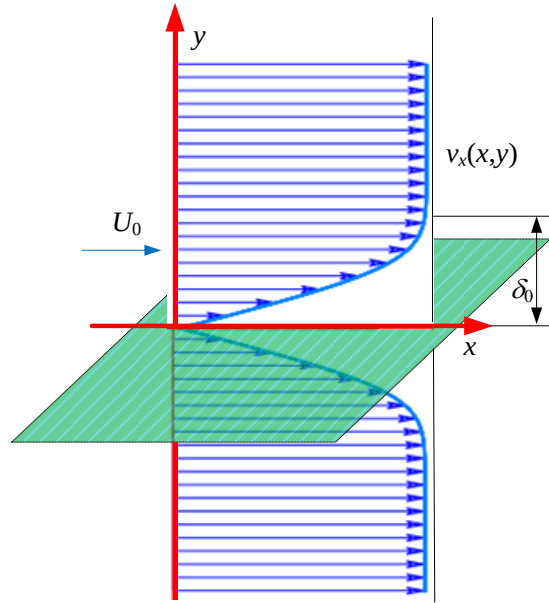


Рис. 6. Распределение продольной компоненты скорости $v_x(x, y)$ вдоль поперечной координаты y у поверхности пластины

Fig. 6. Distribution of the longitudinal velocity $v_x(x, y)$ component along the transverse coordinate y near the plate surface

Сила, действующая на единицу площади, с учетом (38), (39), определяется выражением (47):

$$f_s = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \mu \frac{U_0}{\delta_0} = \mu \frac{U_0^{3/2}}{5,2\sqrt{\nu x}}. \quad (47)$$

Из уравнения непрерывности следует, что скорость распространения движения пленки от источника связана со скоростью распространения фронта пленки соотношением:

$$2\pi u(\rho)\rho = 2\pi U_0 R \rightarrow u(\rho) = \frac{U_0 R}{\rho}. \quad (48)$$

С учетом (48) запишем силу, действующую на слой пленки, находящейся между радиусом ρ и $\rho + d\rho$ в выражения (49):

$$df_\rho = 2\pi \rho f(\rho) d\rho = \frac{2\pi \mu}{5,2\sqrt{\nu}} U_0^{3/2} R^{3/2} \frac{d\rho}{\rho}. \quad (49)$$

Проинтегрировав это соотношение от 0 до R , получим силу, действующую на всю пленку в виде (50)

$$F = \frac{2\pi \mu}{5,2\sqrt{\nu}} U_0^{3/2} R^{3/2} \ln \left(\frac{R}{R_0} \right). \quad (50)$$

Если учесть выражение для силы, растягивающей пленку (33), то можно получить оценочную формулу (51), связывающую скорость фронта расходящейся волны U_0 с поверхностным натяжением $\Delta\sigma$ и вязкостью:

$$2\pi R\Delta\sigma = \frac{2\pi\mu}{5, 2\sqrt{\nu}} U_0^{3/2} R^{3/2} \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) \rightarrow$$
$$\rightarrow U_0 = 2, 93 \sqrt[3]{\frac{(\Delta\sigma)^2}{\rho\mu R \left(\ln \frac{R}{R_0}\right)^2}}, \quad (51)$$

где R_0 – исходный радиус капли, м.

Последняя формула позволяет получить оценку поверхностного натяжения при известной скорости и вязкости эмульсии.

Заключение

Авторами получена оценочная формула (19) скорости распространения поверхностного слоя эмульсии, обусловленного температурным градиентом жидкости.

Формула (19) связывает температурный коэффициент поверхностного натяжения со скоростью поверхности жидкости вещества.

Авторам работы удалось получить формулу вязкости среды, в которой эмульсия рассматривается как непрерывная субстанция, находящаяся в капилляре при известной разности давлений на его концах. Вязкость определяется через расход жидкости – количество жидкости, вытекающей через сечения капилляра в секунду, формулы (30) и (32). Полученная вязкость среды авторами используется

для извлечения информации о поверхностном натяжении.

Авторам работы удалось свести уравнения гидродинамики в обыкновенные дифференциальные уравнения с краевыми условиями для определения скоростей жидкости вблизи поверхности пленки (45), (46). Такой метод представления уравнений более пригоден для инженерных оценок, когда эмульсию можно представлять как жидкость. Этот подход позволяет описать явления распространения поверхностно-активного вещества на поверхности эмульсии и получить оценочную формулу (32), позволяющую оценить вязкость эмульсии.

Формула (51) связывает поверхностное натяжение, скорость фронта волны поверхностно-активного вещества, находящегося на поверхности эмульсии, радиус фронта, вязкость. При измеренной скорости распространения поверхностного слоя эмульсии можно получить оценку температурного коэффициента поверхностного натяжения эмульсии, если известны величины остальных параметров, входящих в формулу (51). При известной оценке температурного коэффициента поверхностного натяжения можно оценить и поверхностное натяжение.

Получив оценки поверхностного натяжения по формулам (19) и (51), можно определить диапазон изменения оценочной величины коэффициента поверхностного натяжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mousavi M., Bernad A., Alopaeus V. Modeling oil/water emulsion separation in batch systems with population balances in the presence of surfactant // *Chemical Engineering Science*. – 2024. – Vol. 300. – 120558.
2. A universal strategy for efficient separation from single emulsion separation to oil-in-water and water-in-oil mixed emulsions / Q. Xiang, Y. Liu, Bo Wang, Ch. Huang, L. Wang, J. He, D. Tian, F. Shen, Y. Zhang // *Separation and Purification Technology*. – 2024. – Vol. 354. – 129517.
3. Rawat U., Singh M.K. Application of emulsion technology in food products // *Food and Humanity*. – 2024. – Vol. 3. – 100400.
4. Ghadeer G. Alharbi, Mahmoud A. Abdulhamid. Optimization of water/oil emulsion preparation: Impact of time, speed, and homogenizer type on droplet size and dehydration efficiency // *Chemosphere*. – 2023. – Vol. 335. – 139136.
5. Towards an accurate size distribution of emulsion droplets by merging distributions estimated from different measuring methods / M. Kostoglou, T.D. Karapantsios, A.P. Chondrou, M.C. Vlachou // *Colloid and Interface Science Communications*. – 2022. – Vol. 46. – 100569.
6. Филипас А.А., Кучман, Исаев Ю.Н. Альтернативный метод получения квазимонодисперсной водомасляной эмульсии // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. – 2022. – Т. 335. – № 5. – С. 219–232.
7. Филипас А.А., Исаев Ю.Н., Кучман А.В. Определение резонансных частот шаровой капли масляной среде // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. – 2022. – Т. 333. – № 10. – С. 178–185.
8. Сычёв В.В. Дифференциальные уравнения термодинамики. – М.: МЭИ, 2010. – 252 с.
9. Сычёв В.В. Сложные термодинамические системы. – М.: Энергоатомиздат, 2010. – 252 с.
10. Румер Ю.Б., Рывкин М.И. Термодинамика. Статистическая физика. Кинетика. – М.: Физматлит, 1977. – 552 с.
11. Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid mechanics. – Toronto: Pergaman Press, 1988. – Vol. 6. – 734 p.
12. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. – М.: Газпром нефть, Институт компьютерных исследований, 2016. – 686 с.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
14. Bitsadze A.V. Equations of mathematical physics. – Moscow, Mir Publ., 1980. – 318 p.
15. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 713 с.
16. Исаев Ю.Н., Купцов А.М. Практика использования системы MathCad. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2010. – 180 с.
17. Ивановский Р.И. Компьютерные технологии в науке и образовании: практика применения систем MathCAD PRO. – М.: Высш. шк., 2003. – 431 с.
18. Формалев В.Ф., Резников Д.Л. Численные методы. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.
19. Авхадиев Ф.Г. Численные методы анализа. – Казань: Казанский федеральный университет, 2013. – 126 с.
20. Русаков С.В. Численные методы: курс лекций. – Пермь.: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2020. – Ч. 2. – 112 с.

Информация об авторах

Александр Александрович Филипас, кандидат технических наук, заведующий отделением автоматизации и робототехники – руководитель отделения на правах кафедры Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30. filipas@tpu.ru

Алёна Владимировна Кучман, аспирант отделения автоматизации и робототехники Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30. avm82@tpu.ru

Зарницын Александр Юрьевич, старший преподаватель отделения автоматизации и робототехники Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30. ayz10@tpu.ru

Юсуп Ниязбекович Исаев, доктор физико-математических наук, профессор отделения автоматизации и робототехники Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30. isaev_yusup@mail.ru

Поступила в редакцию: 30.01.2025

Поступила после рецензирования: 24.02.2024

Принята к публикации: 31.03.2025

REFERENCES

1. Mousavi M., Bernad A., Alopaeus V. Modeling oil/water emulsion separation in batch systems with population balances in the presence of surfactant. *Chemical Engineering Science*, 2024, vol. 300, 120558.
2. Xiang Q., Liu Y., Wang Bo, Huang Ch., Wang L., He J., Tian D., Shen F., Zhang Y. A universal strategy for efficient separation from single emulsion separation to oil-in-water and water-in-oil mixed emulsions. *Separation and Purification Technology*, 2024, vol. 354, 129517.
3. Rawat U., Singh M.K. Application of emulsion technology in food products. *Food and Humanity*, 2024, vol. 3, 100400.
4. Ghadeer G. Alharbi, Mahmoud A. Abdulhamid. Optimization of water/oil emulsion preparation: Impact of time, speed, and homogenizer type on droplet size and dehydration efficiency. *Chemosphere*, 2023, vol. 335, 139136.
5. Kostoglou M., Karapantsios T.D., Chondrou A.P., Vlachou M.C. Towards an accurate size distribution of emulsion droplets by merging distributions estimated from different measuring methods. *Colloid and Interface Science Communications*, 2022, vol. 46, 100569.
6. Filipas A.A., Kuchman A.V., Isaev Yu.N. Alternative method for obtaining a quasi-monodisperse oil-water emulsion. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2024, vol. 335, no. 5, pp. 219–232. (In Russ.)
7. Filipas A.A., Isaev Yu.N., Kuchman A.V. Determination of the resonant frequencies of a global water drop in oil medium. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2022, vol. 333, no. 10, pp. 175–185. (In Russ.)
8. Sychev V.V. *Differential equations of thermodynamics*. Moscow, MPEI Publ., 2010. 250 p. (In Russ.)
9. Sychev V.V. *Complex thermodynamic systems*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1986. 207 p. (In Russ.)
10. Rumer Yu.B., Ryvkin M.Sh. *Thermodynamics, statistical physics and kinetics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1977. 552 p. (In Russ.)
11. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics*. Toronto, Pergaman Press. 1988. Vol. 6, 734 p
12. Levich V.G. *Physico-chemical hydrodynamics*. Moscow, Gazprom Neft, Institute of Computer Research Publ., 2016. 686 p. (In Russ.)
13. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Equations of mathematical physics*. Moscow, MSU Publ., 1999. 799 p. (In Russ.)
14. Bitsadze A.V. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Mir Publ., 1980. 318 p.
15. Shlikhting G. *Boundary layer theory*. Moscow, Nauka Publ., 1974. 713 p. (In Russ.)
16. Isaev Y.N., Kupchov A.M. *Practice of using the MathCad system*. Moscow, Salon-Press, 2010. 180 p. (In Russ.)
17. Ivanovsky R.I. *Computer technologies in science and education: practice of application of MathCAD PRO system*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2003. 431 p. (In Russ.)
18. Formalev V.F., Reznikov D.L. *Numerical methods*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 400 p. (In Russ.)
19. Avkhadiev F.G. *Numerical methods of analysis*. Kazan, Kazan Federal University Publ., 2013. 126 p. (In Russ.)
20. Rusakov S.V. *Numerical methods: lecture course*. Perm, Perm State University Publ., 2020. P. 2, 112 p. (In Russ.)

Information about the authors

Alexander A. Filipas, Cand. Sc., Associate Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russian Federation. filipas@tpu.ru

Alena V. Kuchman, Postgraduate Student, National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russian Federation. avm82@tpu.ru

Alexander Y. Zarnitsyn, Senior Lecturer, National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russian Federation. ayz10@tpu.ru

Yusup N. Isaev, Dr. Sc., Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russian Federation. isaev_yusup@mail.ru

Received: 30.01.2025

Revised: 24.02.2024

Accepted: 31.03.2025