

УДК 519.17:621.644.07

DOI: 10.18799/24131830/2024/7/4339

Шифр специальности ВАК: 05.13.18

## Математические модели и алгоритмы для проектирования магистрального трубопровода транспортировки георесурсов

Г.Ы. Токтошов<sup>1</sup>, Д.А. Мигов<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup> Министерство образования и науки КР, Кыргызская Республика, г. Бишкек

<sup>2</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия, г. Новосибирск

✉ mdinka@rav.sccc.ru

**Аннотация.** *Актуальность* исследования определяется практической важностью задач проектирования сетей инженерных коммуникаций, а именно задач оптимизации структуры магистрального трубопровода по нескольким критериям, таким как экономичность, надежность и другим, в условиях ограничений, например, совместимость различных типов инженерных коммуникаций. Так как магистральный трубопровод прокладывается на местности с различными физико-геологическими факторами, природными и ситуационными условиями, в качестве глобального критерия целесообразно принять надежность его функционирования. Задача оптимизации сетей впервые представлена как отображение магистрального трубопровода по выбранным маршрутам в трехмерном пространстве, учитывая различные существующие коммуникации и объекты, а также высотные отметки местности. В работе представлены задачи оптимизации сетей как непрерывной, так и дискретной постановках, а также изучены различные показатели надежности функционирования магистрального трубопровода. **Цель:** разработка модели прокладывания магистрального трубопровода в трехмерном пространстве, которая также учитывает надежность функционирования трубопроводного транспорта; сравнительный анализ для различных показателей надежности и топологий магистрального трубопровода. **Объекты:** инженерные коммуникации и сети, прокладываемые в трехмерном пространстве. **Методы:** методы вариационного исчисления, методы дискретной оптимизации, методы теории графов и теории гиперсетей, методы анализа надежности сетей. **Результаты.** Задача оптимизации магистрального трубопроводного транспорта поставлена с учетом его вложенности по маршруту в трехмерном пространстве с выбором критерия оптимизации (экономичность, надежность и т. п.). Задача представлена в виде непрерывной и дискретной постановок, что важно для ее развития в рамках теории вариационного исчисления и дискретной оптимизации. В настоящей работе задача была исследована в рамках теории графов и гиперсетей, которые позволяют, во-первых, учитывать вложенность одной структуры (магистрального трубопровода) в другую (дискретный аналог трехмерного пространства) и, во-вторых, наглядно проиллюстрировать результаты численных экспериментов. Показано, что в условиях заданного множества способов прокладки вторичной сети по каналам первичной получают различные оптимальные структуры при рассмотрении в качестве критерия различных показателей надежности, что может быть использовано для реализации проектного решения по строительству и эксплуатации трубопроводного транспорта различного назначения.

**Ключевые слова:** надежность магистрального трубопровода, граф, гиперсеть, трехмерная область, эволюционные алгоритмы

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках проекта № 0251-2022-0005 ПФИ ИВМиМГ СО РАН.

**Для цитирования:** Токтошов Г.Ы., Мигов Д.А. Математические модели и алгоритмы для проектирования магистрального трубопровода транспортировки георесурсов // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2024. – Т. 335. – № 7. – С. 155–165. DOI: 10.18799/24131830/2024/7/4339

---

UDC 519.17:621.644.07

DOI: 10.18799/24131830/2024/7/4339

## Mathematical models and algorithms for designing main pipeline for transporting georesources

G.Y. Toktoshov<sup>1</sup>, D.A. Migov<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup> Ministry of Education and Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyz Republic

<sup>2</sup> Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

✉ mdinka@rav.sccc.ru

**Abstract. Relevance.** The practical importance of the tasks of utility networks design, namely, the problems of optimizing the structure of the main pipeline according to given criteria, such as efficiency, reliability etc., under conditions of limitations, for example, the compatibility of various types of utilities. Since the main pipeline is laid on the ground with various physical and geological factors, natural and situational conditions, it is advisable to take the reliability of its operation as a global criterion. The task of network optimization is proposed in the form of displaying the main pipeline along the selected routes in three-dimensional space, which considers various existing communications and objects, as well as elevation marks of the area. The paper presents the problems of optimizing networks, both in the continuous case and in the discrete case, and also studies various indicators of the reliability of the operation of the main pipeline. **Aim.** To develop a model for laying the main pipeline in three-dimensional space, considering the reliability of the pipeline transport; to conduct a comparative analysis for various reliability indicators and topologies of the main pipeline. **Objects.** Utility communications and networks laid in three-dimensional space. **Methods.** Calculus of variations, discrete optimization methods, graph theory and hypernet theory methods, network reliability analysis methods. **Results.** The task of optimizing the main pipeline transport is given taking into account its nesting along the route in three-dimensional space with the choice of an optimization criterion (economic efficiency, reliability, etc.). The problem is presented in the form of continuous and discrete formulations, which is important for its development both within the theory of the calculus of variations and discrete optimization. In this work, the problem was studied within the framework of the theory of graphs and hypernets, which allow, firstly, taking into account the nesting of one structure (main pipeline) into another (a discrete analogue of three-dimensional space) and, secondly, clearly illustrating the results of numerical experiments. It is shown that under the conditions of a given variants for laying a secondary network along the primary channels, various optimal structures are obtained when considering various reliability indicators as a criterion, which can be used to implement a design solution for the construction and operation of pipeline transport for various purposes.

**Keywords:** main pipeline reliability, graph, hypernet, three-dimensional domain, evolutionary algorithms

**Acknowledgements:** The reported study was supported by a project of the ICM&MG SB RAS 0251-2022-0005.

**For citation:** Toktoshov G.Y., Migov D.A. Mathematical models and algorithms for designing main pipeline for transporting georesources. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2024, vol. 335, no. 7, pp. 155–165. DOI: 10.18799/24131830/2024/7/4339

### Введение

В статье исследуются задачи оптимизации маршрутов прокладки магистрального трубопровода для транспортировки георесурсов по критерию экономической целесообразности проектного решения, надежности их функционирования с учетом совместимости коммуникаций различных типов трубопроводного транспорта, прокладываемых в одном направлении. Представленные исследования являются логическим продолжением работы [1].

Задачи в области добычи и транспортировки георесурсов (газ, нефть, вода) связаны с освоением источников ресурсов, их добычей и первичной переработкой, определением требуемых объемов для потребителей, а также транспортировкой и распределением этих ресурсов между потребителями

[2–8]. Таким образом, возникает многокритериальная задача, в которой ищется экстремум некоторой целевой функции при заданных ограничениях и требованиях. Подобная многокритериальная задача может быть сформулирована следующим образом: из множества вариантов необходимо выбрать проектное решение при заданных ограничениях, обеспечивающее минимум суммарных затрат, при условии, что проектируемая магистральная сеть должна удовлетворять заданному порогу надежности. Другая формулировка состоит в замене оптимизируемого критерия на надежность (естественно, с переходом от минимизации к максимизации целевой функции), а порогового показателя – на стоимость.

Подобные задачи являются NP-трудными, что было исследовано в [1]. В данной работе проанализи-

зированы показатели надежности элементов проектируемого магистрального трубопровода, который осуществляет доставки георесурсов между заданными множествами точек в трехмерном пространстве  $D \subseteq R^3$ . Множества точек в трехмерном пространстве  $D$  могут являться фиксированными и интерпретируются как источники георесурсов, потребители и какие-либо промежуточные точки, такие как распределительные пункты, насосные станции, подстанции и т. п.

В зависимости от количества точек в пространстве  $D$  мы можем перейти к решению одной из следующих подзадач:

- прокладка линейного графа из точки  $A$  в точку  $B$ ;
- прокладка звезды из точки  $A$  в точки  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , в котором  $A$  – источник георесурса,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  – потребители (или наоборот – несколько потребителей, один источник);
- прокладка полного или неполного двудольного графа между источниками георесурсов  $A_1, A_2, \dots, A_m$  и потребителей  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

Ниже мы исследуем задачи прокладывания магистрального трубопровода в трехмерном пространстве по критерию экономической эффективности проектного решения, в котором будут учтены высотные и ситуационные ограничения, а также надежность его функционирования. В качестве меры надежности магистрального трубопровода в условиях возможных отказов элементов первичной сети проанализированы несколько альтернативных показатели надежности, такие как: минимум среди вероятностей существования путей между заданными парами вершин, средняя парная надежность и вероятность существования путей между заданными парами вершин. При этом должны быть учтены особенности местности, по которой будет прокладываться магистральный трубопровод. Для этой цели рассматривается дискретный аналог области для прокладывания магистрального трубопровода в виде математической или цифровой модели местности. В дальнейшем будут поставлены задачи на языке теории гиперсетей, в которой структура проектируемого магистрального трубопровода моделируется в виде графа вторичной сети  $SN$  (*secondary network*), дискретный аналог области размещения – в виде графа первичной сети  $PN$  (*primary network*), а маршруты прокладывания (отображения) вторичной сети  $SN$  в первичную сеть  $PN$  моделируются в виде двухуровневой гиперсети  $HN$  (*hypernet*).

### Гиперсетевая модель прокладывания магистрального трубопровода

Пусть структура магистрального трубопровода представлена графом  $SN=(Y,R)$ , в котором  $Y$  – мно-

жество точек в пространстве, положения которых зафиксированы. Эти точки представляют источники георесурсов, потребителей, а также промежуточные узлы в виде распределительных пунктов, насосных станций, подстанций и т. п. Наличие ребра между ними означает необходимость соединить соответствующие объекты каналами связи.

Рассмотрим дискретный аналог пространства  $D \subseteq R^3$ , в котором прокладывается магистральный трубопроводный транспорт (в данном контексте  $R$  – множество вещественных чисел). Для его представления будем использовать граф  $PN=(X,V)$ , в котором  $X$  – это множества узлов, а  $V$  – множество ребер (будем называть их ветвями), связывающих соответствующие пары узлов из множества  $X$ . Наличие такого ребра предполагает возможность физически соединить соответствующие точки пространства.

Тогда прокладывание (отображение) магистрального трубопровода  $SN=(Y,R)$  по соответствующим маршрутам в графе  $PN=(X,V)$  задается двухуровневой гиперсетью, которая определяется следующим образом [9]:

*Определение:* Гиперсеть  $HN=(X,V,R,P,W,F)$  – это иерархический математический объект, состоящий из:

- на уровне первичной сети:
  - $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – множества вершин;
  - $V=(v_1, v_2, \dots, v_g)$  – множества ветвей;
  - $P: V \rightarrow 2^X$  – отображения, сопоставляющее каждому элементу  $v \in V$  множество  $P(v) \subseteq X$  его вершин, определяющее граф первичной сети  $PN=(X, V; P)$ ;
- на уровне вторичной сети:
  - $Y=(y_1, y_2, \dots, y_p)$  – множества узловых элементов магистрального трубопровода;
  - $R=(r_1, r_2, \dots, r_m)$  – множества ребра (магистральные трубопроводы);
  - $W: R \rightarrow 2^{P(F(r))}$  отображение, сопоставляющее каждому элементу  $r \in R$  подмножество  $W(r) \subseteq P(F(r))$  его вершин, где  $P(F(r))$  – множество вершин  $PN$ , инцидентных ветвям  $F(r) \subseteq V$ , определяющее граф вторичной сети  $SN=(Y \subseteq X, R; W)$ . В данном случае  $SN$  соответствует структуре проектируемой сети коммуникации.

Тогда отображение  $F: R \rightarrow 2^V$ , сопоставляющее каждому ребру  $r \in R$  графа вторичной сети  $SN$  определенный маршрут из ветвей  $v \in V$  в графе первичной сети  $PN$ , определяет гиперсеть. Таким образом, взаимодействие магистрального трубопровода и трехмерной области определяется гиперграфом (*hyper graph*)  $HG=(V, R; F)$ , т. е. ветвь  $v \in V$  графа  $PN$  инцидентна ребру  $r \in R$  тогда и только тогда, когда ребро  $r$  проходит (реализовано) по соответствующей ветви  $v$ , а вложение графа  $SN$  в  $PN$  описывает-

ся гиперсетью  $HN$ , которая однозначно определяется тройкой  $(PN, SN; F)$ .

Предполагается, что графы  $PN$  и  $SN$  неориентированные. На рис. 1 граф первичной сети  $PN$  представлен в виде решетки, а граф вторичной сети  $SN$  – в виде маршрутов в  $PN R = \{(1,4,5), (1,4,7), (7,8,9)\}$ .

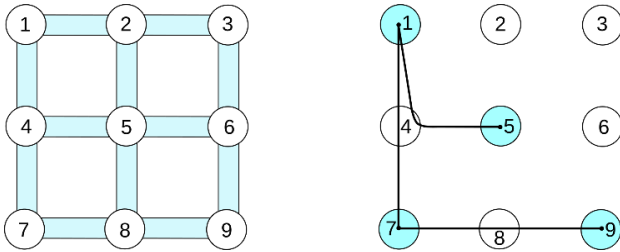


Рис. 1. Пример гиперсети  
 Fig. 1. Hypernet example

Отметим, что в зависимости от вида отображения (сюръективное, инъективное или биективное) ребер графа вторичной сети  $SN$  по соответствующим маршрутам графа первичной  $PN$ , т. е. в зависимости от  $F: R \rightarrow 2^V$ , возникают различные прикладные задачи в области проектирования и строительства инженерных коммуникаций различного назначения.

### Математические модели местности

#### Трехмерное пространство

Предположим, что область прокладки магистрального трубопроводного транспорта рассматривается как трехмерное дискретное пространство  $D \subseteq R^3$ , содержащее в себе существующие коммуникации и сети, а также природные и ситуационные ограничения.

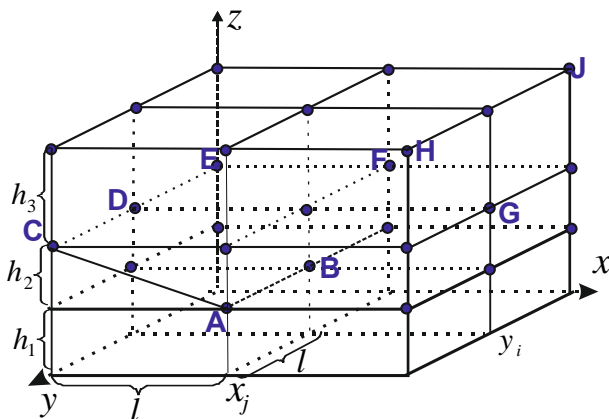


Рис. 2. Дискретный аналог области прокладки – граф  $PN=(X,Y)$

Fig. 2. Discrete analog of the laying area is a graph  $PN=(X,Y)$

В зависимости от расположения соединяемых пар точек (одна из которых всегда стартовая, а другая конечная), метрические характеристики между ними определяется следующим образом (рис. 2):

- $\rho(A,B)=l$ , если узлы  $A$  и  $B$  имеют одинаковые отметки;
- $\rho(A,C) = \sqrt{l^2 + h_2^2}$ , если узлы  $A$  и  $C$  имеют разные отметки;
- $\rho(B,J) = \sqrt{2l^2 + (h_2 + h_3)^2}$ , если узлы  $B$  и  $J$  имеют разные отметки (диагональ с двумя ступенями);
- $\rho(D,F) = l\sqrt{2}$ , если узлы  $D$  и  $F$  имеют одинаковые отметки (диагональ);
- $\rho(A,G) = \sqrt{2l^2 + h_2^2}$ , если узлы  $A$  и  $G$  имеют разные отметки (диагональ с одной ступенью).

Возможные направления перехода из точки  $A(x_1, y_1, z_1)$  в точку  $B(x_2, y_2, z_2)$  в трехмерном пространстве можно представить как в непрерывной, так и в дискретной форме, в зависимости от специфики решаемой задачи [10, 11].

Если решается непрерывная задача, то точка  $A(x_1, y_1, z_1)$  совпадает с вершиной конуса, а одно из возможных положений точки  $B(x_2, y_2, z_2)$  – с его основанием (рис. 3, а).

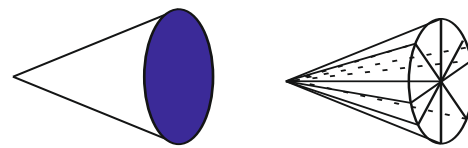


Рис. 3. Связность пар вершин в трехмерном пространстве в непрерывном случае (слева) и дискретном случае (справа)

Fig. 3. Connectivity of pairs of vertices in three-dimensional space in a continuous case (left), and in a discrete case (right)

В дискретном случае связность пары вершин  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$  графа  $PN$  в трехмерном пространстве может быть определена по принципу четырехсвязности  $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \leq 1$  (рис. 4, а) или восьмисвязности  $|x_1 - x_2| \leq 1, |y_1 - y_2| \leq 1$  и  $|z_1 - z_2| \leq 1$  (рис. 4, б).



Рис. 4. Принципы связности точек в дискретном случае: четырехсвязность (слева) и восьмисвязность (справа)

Fig. 4. Connectivity principles of points connectivity in the discrete case: the four-connectivity (left), and the eight-connectivity case (right)

В дискретном случае координаты точки  $B(x_2, y_2, z_2)$  могут находиться в одном из четырех или восьми положений, в зависимости от применяемого типа связности. В свою очередь, тип связности зависит от сложности пространства  $D \subseteq R^3$ , в котором предполагается прокладывать магистральный трубопровод.

### Постановка задачи

#### Непрерывная постановка

Ниже мы приводим общую постановку задачи прокладывания магистрального трубопровода между заданными множествами точек в трехмерном пространстве в непрерывной постановке.

Пусть:

- $\mu(x, y, z)$  – произвольный маршрут между заданными парами точек  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$ ;
- $f(x, y, z)$  – функция удельных земляных работ (подготовка полосы, рытье траншеи, коллекторов, подземных туннелей и т. п.) в точках  $(x, y, z)$  трехмерного пространства  $D \subseteq R^3$ . Она может быть непрерывной, кусочно-непрерывной или дискретной в зависимости от области определения данной функции;
- $g(x, y, z)$  – функция удельных строительных затрат магистрального трубопровода (приобретения и монтаж) в точках  $(x, y, z)$  трехмерного пространства  $D \subseteq R^3$ . Она может меняться из точки в точку в зависимости от категории местности.

Согласно [12], длина пространственной кривой  $\mu_{AB}(x, y, z)$ , заданной системой уравнений  $y=y(x)$ ,  $z=z(x)$  и проходящей через точки  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$ , равна

$$l(\mu) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'_x(x)]^2 + [z'_x(x)]^2} dx. \quad (1)$$

В нашем случае длина трехмерной кривой  $l(\mu)$  равна (тождественна) длине ветви  $v \in V$  графа первичной сети  $PN$ , т. е.  $l(\mu) \equiv l(v)$ .

Подынтегральное уравнение в (1) обозначим как  $dl$ , т. е.

$$dl = \sqrt{1 + [y'_x(x)]^2 + [z'_x(x)]^2} dx.$$

Пуст  $\mu[x, y(x), z(x)]$  кривая, связывающая в пространстве  $D \subseteq R^3$  точки  $(x_1, y_1, z_1) \in D$ ,  $i=1, 2$ . Тогда суммарная стоимость на строительство этой трассы (траншея, коллектор и т. п.) определяется как

$$C(\mu) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), z(x)] dl. \quad (2)$$

Мы полагаем, что длина прокладываемого магистрального трубопровода (длина ребра  $r \in R$ ) равна суммарному числу ветвей (трасс), инцидентных

этому трубопроводу, т. е.  $l(r) = \sum_{v \in F(r)} l(v)$ . Так как рассматривается непрерывный случай, длина прокладываемого магистрального трубопровода равна длине непрерывной трассы, т. е.  $l(r) = l(v)$ .

Стоимость проектируемого магистрального трубопровода, прокладываемого вдоль трассы  $\mu[x, y(x), z(x)]$ , определяется следующим образом:

$$D(\mu) = \int_{x_1}^{x_2} g[x, y(x), z(x)] dx, \quad (3)$$

где  $g(x, y, z)$  – функция удельной стоимости магистрального трубопровода, зависящая от координаты точек  $(x, y, z)$  в трехмерном пространстве  $D \subseteq R^3$ .

Тогда непрерывная задача может быть сформулирована следующим образом: пусть  $\mu(A, B)$  – множества всех возможных маршрутов прокладывания магистрального трубопровода из точки  $A$  в точку  $B$ , представляющие собой непрерывные кривые в трехмерном пространстве  $D \subseteq R^3$ . Тогда задача заключается в поиске такой кривой  $\mu_0$  среди всех трасс  $\mu(A, B)$ , вдоль которой суммарная стоимость (2) (стоимость подготовки и строительства линейных сооружений (трасс, опор и т. п.)) и (3) (стоимость приобретения и прокладывания магистрального трубопровода) принимает наименьшее значение, т. е.

$$\min_{\mu_0 \in \mu(A, B)} [C(\mu) + D(\mu)] = \int_A^B [f(x, y(x), z(x)) + g(x, y(x), z(x))] dx \quad (4)$$

при

$$R(HN) \geq R_0, \quad (5)$$

где  $R(HN)$  – надежность гиперсети (показатели надежности изучаются в следующей пункте);  $R_0$  – требуемый порог надежности.

Непрерывная задача в виде (4), (5), без учета условия порогового значения надежности, позволяет решить ее методами вариационного исчисления [13].

#### Дискретная постановка

Пусть заданы графы первичной  $PN$  (дискретный аналог трехмерного пространства) и вторичной сети  $SN$  (предполагаемая структура магистрального трубопровода) некоторой гиперсети  $HN$ . В дискретной постановке задача выбора трассы для прокладки коммуникаций из пункта  $A(x_1, y_1, z_1)$  в пункт  $B(x_2, y_2, z_2)$  заключается в выборе маршрута в трехмерном пространстве  $D \subseteq R^3$ , имеющего минимальную стоимость  $\mu_{AB}$  среди всех маршрутов  $\mu(A, B)$

между заданными парами вершин  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$  на графе первичной сети  $PN$ , и отображения ребер (магистрального трубопровода)  $r \in R$  графа вторичной сети  $SN$  по выбранным маршрутам в  $PN$ . То есть требуется найти

$$F : R \rightarrow 2^V,$$

для которого

$$Q(HN) = \min_{\mu(A,B)} \left( \sum_{(i,j) \in \mu_{AB}} (c_{ij} + d_{ij}) \cdot l(r) \right) \quad (6)$$

при ограничении (5),

где  $\mu(A,B)$  – множество всех возможных маршрутов из  $A(x_1, y_1, z_1)$  в  $B(x_2, y_2, z_2)$ ;  $\mu_{AB}$  – маршрут, обеспечивающий минимум стоимости перехода из  $A(x_1, y_1, z_1)$  в  $B(x_2, y_2, z_2)$ ;  $c_{ij}$  – стоимость перехода из пункта  $i$  в пункт  $j$ , определяющих звено маршрута  $\mu_{AB}$  на графе первичной сети  $PN$ , т. е.  $(i,j) \in \mu_{AB}$ ;  $d_{ij}$  – удельная стоимость ребер  $r \in R$  (магистрального трубопровода) графа вторичной сети  $SN$  из пункта  $i$  в  $j$ ;  $l(r)$  – длина прокладываемого магистрального трубопровода (длина ребра  $r \in R$ ) равна суммарному числу ветвей (трасс), инцидентных этому трубопроводу, т. е.  $l(r) = \sum_{v \in F(r)} l(v)$ .

Для различных вариаций задач (5), (6) предложены различные алгоритмы их решения. На рис. 5 представлены результаты расчётов этих алгоритмов: метод, основанный на построении самой надёжной структуры (Max Prob); метод основанный на жадной стратегии, использующий также предыдущий алгоритм (Floyd Greedy Prob); метод, использующий алгоритм Йена для построения множества  $k$ -кратчайших путей (K-path), основанный на подходе муравьиной акации (AntColony), а также две их комбинации Greedy+K-path, AntColony+K-path [14].

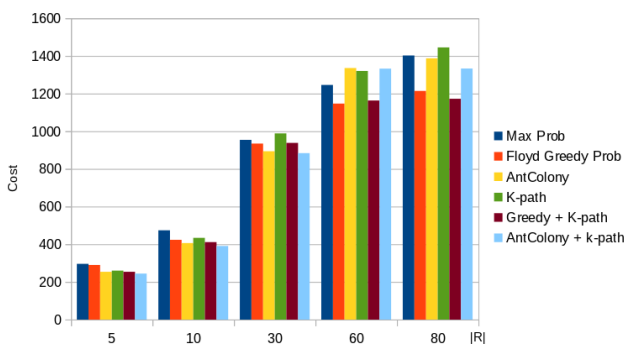


Рис. 5. Результаты расчетов для решетки  $10 \times 10$   
 Fig. 5. Numerical results for the  $10 \times 10$  lattice

В качестве графа первичной сети  $PN$  была взята решетка  $10 \times 10$ . Стоимость ветвей первичной сети – случайные числа от 5 до 10 условных единиц. Стоимость ребер вторичной сети – случайные числа от 1 до 5.  $R_0=0,7$  для  $|R|=5, 10$ ;  $R_0=0,6$  для  $|R|=30, 60$ ;  $R_0=0,5$  для  $|R|=80$ . В качестве надежности был рассмотрен такой показатель, как минимальное значение среди вероятностей связности ребер вторичной сети (пункт “Анализ надёжности гиперсетей”). На диаграмме по оси абсцисс показана стоимость полученной гиперсети, по оси ординат – число ребер  $|R|$ , которые нужно вложить в первичную сеть. Можно заметить, что целесообразно использование K-path как часть другого алгоритма для нахождения более дешевого решения, а также что для небольших значений  $|R|$  лучшее решение находит семейство алгоритмов AntColony, а для больших лучше работают жадные алгоритмы (Greedy).

### Анализ надёжности гиперсетей

Задачи, связанные с анализом надёжного функционирования сетей различного назначения, активно изучались в [15–28] и продолжают изучаться в настоящее время. Как правило, для анализа надёжности сетей применяют различные стохастические методы, такие как метод Монте-Карло, вероятностный анализ и другие [15–21], а в качестве математической модели выступает случайный граф [22]. Предполагается, что элементы графа, вершины и/или рёбра присутствуют в графе с заданными вероятностями, что описывает надёжность соответствующих элементов сети. Классический показатель надёжности сетей – вероятность её связности, то есть вероятность связности соответствующего случайного графа [9]. В более общем случае рассматривают заданное подмножество узлов  $K$  (плюсов), для которых необходимо обеспечить возможность установления соединения друг с другом. Вероятность связности этих узлов – это так называемая  $K$ -терминальная надёжность ( $K$ -terminal network reliability). Выделяют два важных случая:  $K=V$ , в таком случае получаем уже упомянутую вероятность связности (all-terminal network reliability); и  $K=2$ , что соответствует надёжности двухполюсной сети (2-terminal network reliability). Отметим, что для всех этих показателей точный их расчёт представляет собой  $NP$ -трудную задачу [23]. Несмотря на это, точные методы расчёта широко используются. Например, выделяется класс последовательно-параллельных сетей [24], для которых расчёт осуществляется за полиномиальное время. В общем случае возможно использование приближённых методов, например метода Монте Карло [25].

Понятие случайной гиперсети для анализа надёжности иерархических структур было впервые

введено в работах [26, 27]. Соответствующий аппарат был далее развит в [28]. Как правило, рассматривается случай отказов в первичной сети, но также изучены некоторые варианты отказов элементов и во вторичной сети.

Для рассматриваемых задач – проектирование и структурная оптимизация сетей инженерных коммуникаций в условиях возможных отказов элементов, в том числе магистральных трубопроводов, подходит математическая модель, изложенная в [1]. Мы рассматривали возможность выхода из строя рёбер первичной сети (траншей, коллекторов, и т. д.), при котором все проходящие через это ребро ветви (линии связи вторичной сети) перестают функционировать. Например, при обвале штрека в шахте будут скорее всего повреждены кабели электропитания, связи, сети мониторинга, и другие. Вероятность выхода из строя рёбер может быть определена исходя из статистических данных, экспертных оценок или в результате моделирования, т. е. точно так же, как и для классических моделей сетей с ненадёжными элементами. Имея значения надёжности ветви первичной сети, надёжность ребра вторичной определяется естественным образом как произведение надёжностей ветвей, через которые она проходит. Таким образом, приходим к аналогу уже упомянутой двухполюсной надёжности, определяемой как максимум из надёжностей всех рёбер, соединяющих два заданных узла вторичной сети. Методы оптимизации инженерных сетей, с учётом надёжности по этому показателю, представлены в [29]. Также в [30] мы обсуждали возможность использования других показателей.

В данной работе мы рассмотрим альтернативные показатели надёжности для проектирования и оптимизации сетей инженерных коммуникаций и магистральных трубопроводов и проиллюстрируем их использование. Приведём сначала определение упомянутого показателя надёжности.

Будем считать, что ветви  $V$  первичной  $r \in R$   $PN=(X, V)$  сети подвержены случайным отказам, происходящим независимо друг от друга с заданными вероятностями  $p_i, 1 \leq i \leq g$ .

Надёжность ребра вторичной сети  $r \in R$  определим как

$$R_r(HN) = \prod_{v \in F(r)} p(v). \quad (7)$$

Если для ребра  $r \in R$  путь  $F(r)$  имеет конечные точки  $a$  и  $b$ , и если никакие другие рёбра не связывают эти точки, мы будем использовать обозначение  $R_{ab}(HN)$  вместо  $R_r(HN)$ . Если для узлов  $a$  и  $b$  существует более одного такого ребра, это обозначение используется для того ребра, значение надёжности которого максимально.

Надёжность  $R(HN)$  = гиперсети  $HN$  в целом, с учетом того, что в первичной сети происходят сбои, но при этом все потребители должны быть связаны с необходимыми им поставщиками, определялась как:

$$\min(R_{pair}) = \min\{R_{ab}(HN)\}, a \in Y_{source}, b \in Y_{consumer}, \quad (8)$$

где  $Y_{source}$  – источник георесурсов;  $Y_{consumer}$  – потребители.

Таким образом,  $R_1(HN)$  является минимумом среди всех двухтерминальных надёжностей  $R_{ab}(HN)$ , где  $a$  – это источник ресурса,  $b$  – потребитель. Если мы рассматриваем случай, когда подобные узлы не заданы, а необходимо просто проложить рёбра по первичной сети, то это будет минимум среди всех надёжностей рёбер.

Однако не во всех случаях адекватной мерой надёжности будет именно указанный показатель. Введём в рассмотрение показатель для описания надёжности сети в среднем:

$$Av(R_{pair}) = \frac{1}{\Omega} \sum_1^{\Omega} R_{ab}(HN), a \in Y_{source}, b \in Y_{consumer}, \quad (9)$$

где  $\Omega$  – количество всех рассматриваемых пар источник–потребитель или всех рёбер, если эти пары в явном виде не заданы.

Рассмотрим также показатель, который необходим для описания надёжности в случае, когда нужно, чтобы все потребители и поставщики одновременно были связаны с максимальной вероятностью. Определим его как вероятность существования путей между каждой парой источник–потребитель:

$$R_{All\_Pairs}(HN) = probability \quad (Exist\_a\_path\_between\ a \in Y_{source}, b \in Y_{consumer}). \quad (10)$$

Определение вероятностного пространства в этом случае делается по аналогии с, например, работой [17].

Возможны ситуации, когда при одних и тех же условиях разные конфигурации инженерной сети будут оптимальными с точки зрения введённых нами выше показателей (7)–(10).

Например, рассмотрим первичную сеть (рис. 6), представленную решёткой  $4 \times 8$ , где каждая ветвь присутствует с вероятностью  $p$ . Узлы, которые необходимо связать рёбрами, расположены сверху и снизу (выделены на рис. 6), т. е. каждое ребро связывает выделенный узел сверху и выделенный узел, изображённый непосредственно под ним.

Рассмотрим три способа соединения этих трёх пар узлов, изображённых на рис. 6–8.

Значения надёжностей гиперсети для каждого из случаев приведены в таблице.

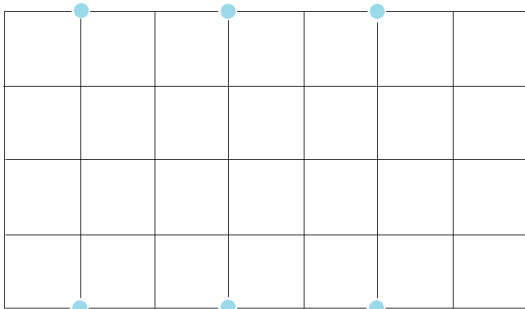


**Таблица.** Значения надёжности для разных показателей и разных вариантов прокладки вторичной сети

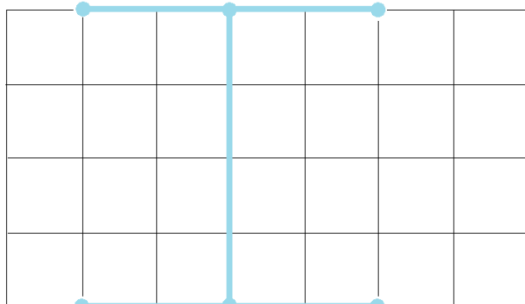
**Table.** Reliability values for different indicators and different options for laying the secondary network

Показатели Indicators	Топологии/Topologies		
	T1	T2	T3
$\text{Min}(R_{\text{Pair}})$	$p^8$	$p^6$	$p^8$
$\text{Av}(R_{\text{Pair}})$	$\frac{2p^8 + p^4}{3}$	$p^6$	$\frac{2p^4 + p^8}{3}$
$R_{\text{All Pairs}}$	$p^{12}$	$p^{18}$	$p^{16}$

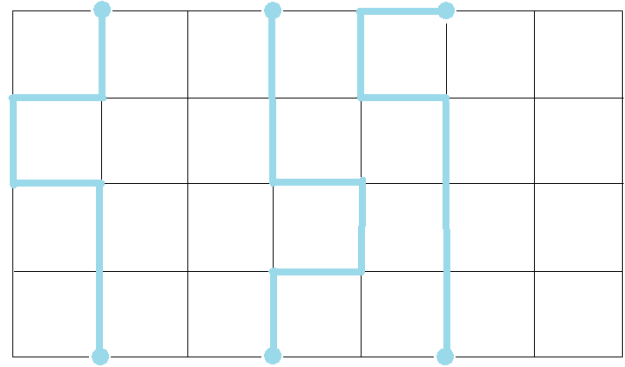
Обозначим варианты прокладки вторичной сети по ветвям первичной как № 1 (рис. 7), № 2 (рис. 8), № 3 (рис. 9). Из таблицы видно, что для разных показателей разные топологии будут оптимальными. Так, для первого (таблица) показателя лучшим будет вариант № 2. Надёжность для вариантов № 2 и 3 совпадает. Для третьего показателя лучшей будет топология № 1, средней – № 3, худшей – № 2. Для второго показателя подобный список будет зависеть от значения  $p$ . Для определённых значений лучшим будет и вариант № 3, который с точки зрения других показателей не является лучшим.



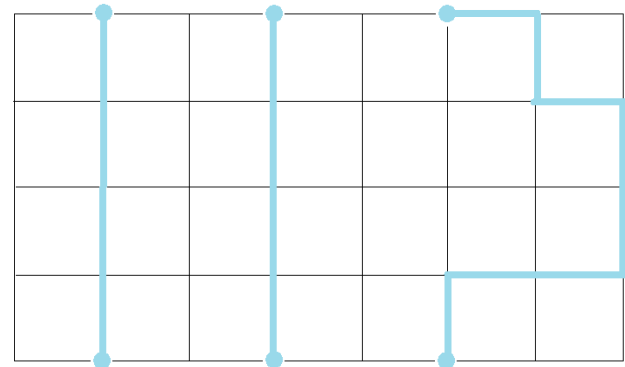
**Рис. 6.** Решетка 4×8  
**Fig. 6.** 4×8 grid



**Рис. 7.** Топология T1: вариант прокладки вторичной сети с совместным использованием ветвей первичной  
**Fig. 7.** Topology T1: the secondary network laying variant with the joint use of primary one branches



**Рис. 8.** Топология T2: вариант прокладки вторичной сети без совместного использования ветвей первичной  
**Fig. 8.** Topology T2: the secondary network laying without sharing the branches of the primary one



**Рис. 9.** Топология T3: другой вариант прокладки вторичной сети без совместного использования ветвей первичной  
**Fig. 9.** Topology T3: another secondary network laying without sharing the branches of the primary one

### Заключение

Для проектирования и структурной оптимизации сетей доставки георесурсов с учётом их иерархичной вложенности сформулированы соответствующие математические задачи в виде непрерывной и дискретной постановок. Приводится математический и алгоритмический аппарат для решения подобных задач, который описан в рамках теории вариационного исчисления, теории графов и дискретной оптимизации. Рассмотрены различные показатели надёжности проектируемой сети в условиях отказов первичной сети – траншей, штреков в шахте, и т. д. Выбор того или иного показателя при проектировании определяется задачами и условиями функционирования каждой конкретной сети инженерных коммуникаций. Показано, что при одних и тех же условиях разные конфигурации инженерной сети будут оптимальными с точки зрения разных показателей.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Токтошов Г.Ы., Юргенсон А.Н., Мигов Д.А. Оптимизация маршрутов прокладки магистрального трубопровода для транспортировки георесурсов // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2019. – Т. 330 – № 6. – С. 41–49.
2. Djebedjian B., El-Naggar M., Shahin I. Optimal design of gas distribution network: a case study // Mansoura Engineering Journal. – 2011. – Vol. 36 – № 3 – P. 35–51.
3. Heidarifar M., Ghasemi H. A network topology optimization model based on substation and node-breaker modeling // IEEE Transactions on Power Systems. – 2016. – Vol. 31. – № 1. – P. 247–255. DOI: 10.1109/TPWRS.2015.2399473
4. A survey of optimization method for oil-gas pipeline network layout / Fangfang Li, Qiang Liu, Xiu Guo, Jun Xiao // The 2015 International Conference on Mechatronics, Electronic, Industrial and Control Engineering (MEIC 2015). – China, April 1–3, 2015. – P. 257–260.
5. Edgar T.F., Himmelblau D.M., Bickel T.C. Optimal design of gas transmission networks // SPE J. – 1978. – Vol. 18. – P. 96–104. DOI: <https://doi.org/10.2118/6034-PA>
6. Shie-Yui Liong, Atiquzzaman Md. Optimal design of water distribution network using shuffled complex evolution // Journal of The Institution of Engineers, Singapore. – 2004. – Vol. 44. – Iss. 1. – P. 93–107.
7. Complex network approach for the structural optimization of global crude oil trade system / Gaogao Dong, Ting Qing, Ruijin Du, Chao Wang, Ruiqi Li, Minggang Wang, Lixin Tian, Lin Chen, A.L.M. Vilela, H.E. Stanley // Journal of Cleaner Production. – 2020. – Vol. 251. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.119366> (дата обращения 09.09.2023).
8. Смирнов П.В. Предварительные результаты ревизии минерально-сырьевой базы опал-кристобалитовых пород в среднем Зауралье // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2017. – Т. 328. – № 4. – С. 28–37.
9. Попков В.К. О моделировании городских транспортных систем гиперсетями // Автоматика и телемеханика. – 2011. – Т. 72. – № 6. – С. 179–189.
10. Токтошов Г.Ы. Методология выбора трасс для прокладки сетей и коммуникаций // Вестник СибГУТИ. – 2022. – Т. 1. – С. 97–107.
11. Toktoshov G.Y. The routes choosing methodology for laying networks in three-dimensional space // Optimization Problems of Complex Systems: Proc. 17th International Asian School-Seminar. – Novosibirsk, Russia, 2021. – P. 134–138.
12. Длина дуги трехмерной кривой. URL: [https://cyclowiki.org/wiki/%D0%94%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B0\\_%D0%B4%D1%83%D0%B3%D0%B8\\_%D1%82%D1%80%D1%91%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B9\\_%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D0%B9/](https://cyclowiki.org/wiki/%D0%94%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B0_%D0%B4%D1%83%D0%B3%D0%B8_%D1%82%D1%80%D1%91%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D0%B9/) (дата обращения: 17.07.2023).
13. Cherkov A. Variational methods for structural optimization // Springer. – 2002. – P. 574. DOI: 10.1007/978-1-4612-1188-4
14. Токтошов Г.Ы., Юргенсон А.Н., Мигов Д.А. Исследование эффективности метода k-кратчайших путей для оптимизации топологии иерархических сетей // Проблемы оптимизации сложных систем: Труды XVI Международной Азиатской школы-семинара. – Россия, Новосибирск, 25–29 августа 2020. – С. 38–42.
15. Optimization of pipeline network layout for multiple heat sources. Distributed Energy Systems Considering Reliability Evaluation. Processes / Ziyuan Cui, Hai Lin, Yan Wu, Yufei Wang, Xiao Feng. – 2021. – P. 1308. URL: <https://doi.org/10.3390/pr9081308> (дата обращения 09.09.2023).
16. Substation-level grid topology optimization using bus splitting / Yu. Zhou, A.S. Zamzam, A. Bernstein, H. Zhu // American Control Conference (ACC). – USA, 2021. – P. 1–7.
17. Stochastic long-term reliability of water distribution networks using Monte Carlo simulation / M. Dini, A. Mohammadikaleibar, S. Hashemi, V. Nourani // Urban Water Journal. – 2021. – P. 151–160. DOI: 10.1080/1573062X.2021.1971264
18. Zhaoxi Liu, Lingfeng Wang Leveraging network topology optimization to strengthen power grid resilience against cyber-physical attacks // IEEE Transactions on Smart Grid. – 2021. – Vol. 12. – № 2. – P. 1552–1564.
19. Optimization of crude oil trade structure: a complex network analysis / Gaogao Dong, Ting Qing, Lixin Tian, Ruijin Du, Jingjing Li // Complexity. – 2021. – P. 11. URL: <https://doi.org/10.1155/2021/3480546> (дата обращения 09.09.2023).
20. Kumar A., Kansal M.L. Discussion of 'Reliability Analysis of Water Distribution Systems' by Gupta R. and Bhave P.R. // Journal of Environmental Engineering. – 1995. – Vol. 121. – P. 674–677.
21. Economic level of reliability for the rehabilitation of hydraulic networks // C. Tricarico, R. Gargano, Z. Kapelan, D.A. Savić, G. de Marinis // Journal of Civil Engineering and Environmental Systems. – 2006. – Vol. 23. – P. 191–207.
22. Жуковский М.Е., Райгородский А.М. Случайные графы: модели и предельные характеристики // Успехи математических наук – 2015. – Т. 70. – № 1 (421). – С. 35–88.
23. Colbourn Ch.J. The combinatorics of network reliability. – New York: Oxford University Press, 1987. – 160 p.
24. Shooman A.M., Kershenbaum A. Exact graph-reduction algorithms for network reliability analysis // IEEE Global Telecommunications Conference GLOBECOM'91. – New York: IEEE Press, 1991. – P. 1412–1420.
25. Martinez S.P., Calvino B.O., Rocco S.C. All-terminal reliability evaluation through a Monte Carlo simulation based on an MPI implementation // European Safety and Reliability Conference: Advances in Safety, Reliability and Risk Management (PSAM 2011/ESREL 2012). – Helsinki, 2012. – P. 1–6.
26. Rodionov A.S., Rodionova O.K. Random hypernets in reliability analysis of multilayer networks // J. Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2015. – P. 307–315.
27. Rodionov A.S., Rodionova O.K. Using random hypernets for reliability analysis of multilevel networks // 1st Int. Conf. on Mathematical Methods and Computational Techniques in Science and Engineering (MMCTSE 2014). Ser. Mathematical Methods in Science and Engineering. – Athens, Greece, 2014. – P. 119–121.
28. Rodionov A.S., Kalney A.M. Reliability polynomials in optimizing placement of base stations in monitoring networks // Actual Problems of Electronic Instrument Engineering: Proc. of the XIV International Scientific-Technical Conference. – Novosibirsk, Russia, 2018. – P. 252–259.

29. Токтошов Г.Ы., Юргенсон А.Н., Мигов Д.А. О сложности задач оптимизации сетей инженерных коммуникаций // Т-Сотт: Телекоммуникации и транспорт. – 2020. – Т. 14. – № 9. – С. 17–23.
30. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Вероятность связности телекоммуникационной сети на основе приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий // Информационно-управляющие системы. – 2021. – Т. 6. – С. 53–63. URL: <https://doi.org/10.31799/1684-8853-2021-6-53-6> (дата обращения 09.09.2023).

### Информация об авторах

**Гулжигит Ысакович Токтошов**, кандидат технических наук, доцент, главный специалист Управления науки, Министерство образования и науки КР, Кыргызская Республика, 720040, г. Бишкек, ул. Тыныстанова, 257. [tgi\\_tok@gambler.ru](mailto:tgi_tok@gambler.ru); <https://orcid.org/0000-0001-7697-7713>

**Денис Александрович Мигов**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории системного моделирования и оптимизации, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 6. [mdinka@rav.sccc.ru](mailto:mdinka@rav.sccc.ru); <https://orcid.org/0000-0003-3386-4641>

Поступила в редакцию: 11.09.2023

Поступила после рецензирования: 19.01.2024

Принята к публикации: 31.05.2024

### REFERENCES

1. Toktoshov G.Y., Yurgenson A.N., Migov D.A. Optimization of routes for laying trunk pipeline to transport geo-resources. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2019, vol. 330, no. 6, pp. 41–49. (In Russ.)
2. Djebedjian B., El-Naggar M., Shahin I. Optimal design of gas distribution network: a case study. *Mansoura Engineering Journal*, September 2011, vol. 36, no. 3, pp. 35–51.
3. Heidarifar M., Ghasemi H. A network topology optimization model based on substation and node-breaker modeling. *IEEE Transactions on Power Systems*, Jan. 2016, vol. 31, no. 1, pp. 247–255. DOI: 10.1109/TPWRS.2015.2399473.
4. Fangfang Li, Qiang Liu, Xiu Guo, Jun Xiao. A survey of optimization method for oil-gas pipeline network layout. *The 2015 International Conference on Mechatronics, Electronic, Industrial and Control Engineering (MEIC 2015)*. Shenyang, China, April 1–3, 2015. pp. 257–260.
5. Edgar T.F., Himmelblau D.M., Bickel T.C. *Optimal design of gas transmission networks*. 1978. pp. 96–104. DOI: <https://doi.org/10.2118/6034-PA>
6. Shie-Yui Liong, Atiquzzaman Md. Optimal design of water distribution network using shuffled complex evolution. *Journal of The Institution of Engineers, Singapore*, 2004, vol. 44, Iss. 1, pp. 93–107.
7. Gaogao Dong, Ting Qing, Ruijin Du, Chao Wang, Ruiqi Li, Minggang Wang, Lixin Tian, Lin Chen, Vilela A.L.M., Stanley H.E. Complex network approach for the structural optimization of global crude oil trade system. *Journal of Cleaner Production*, 2020, vol. 251. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.119366> (accessed 9 September 2023).
8. Smirnov P.V. Preliminary results of the revision of the mineral resource base of opal-cristobalite rocks in the Middle Trans-Urals. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2017, vol. 328, no. 4, pp. 28–37. (In Russ.)
9. Popkov V.K. On modeling city traffic systems with hypernetworks. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72 (6), pp. 179–189. (In Russ.)
10. Toktoshov G.Y. The route choosing methodology for networks and communications laying. *The Herald of the Siberian State University of Telecommunications and Information Science*, 2022, vol. 1, pp. 97–107. (In Russ.)
11. Toktoshov G.Y. The routes choosing methodology for laying networks in three-dimensional space. *Proc. 17th International Asian School-Seminar. Optimization Problems of Complex Systems, OPCS 2021*. Novosibirsk, Russia, 2021. pp. 134–138.
12. *The arc length of a three-dimensional curve*. Available at: [https://cyclowiki.org/wiki/%D0%94%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B0\\_%D0%B4%D1%83%D0%B3%D0%B8\\_%D1%82%D1%80%D1%91%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B9\\_%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D0%B9/](https://cyclowiki.org/wiki/%D0%94%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B0_%D0%B4%D1%83%D0%B3%D0%B8_%D1%82%D1%80%D1%91%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%BE%D0%B9/) (accessed 17 July 2023).
13. Cherkhaev A. *Variational methods for structural optimization*. Springer, 2002, 574 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1188-4.
14. Toktoshov G.Y., Yurgenson A.N., Migov D.A. Investigation of the effectiveness of the k-shortest paths method for optimizing the topology of hierarchical networks. *Proceedings of the XVI International Asian School-seminar. Optimization Problems of Complex Systems*. Russia, Novosibirsk, August 25–29, 2020. pp. 38–42. (In Russ.)
15. Ziyuan Cui, Hai Lin, Yan Wu, Yufei Wang, Xiao Feng. Optimization of pipeline network layout for multiple heat sources distributed energy systems considering reliability evaluation. *Processes*, 2021, vol. 9, 1308 p. Available at: <https://doi.org/10.3390/pr9081308> (accessed 9 September 2023).
16. Zhou Yu., Zamzam A.S., Bernstein A., Zhu H. Substation-level grid topology optimization using bus splitting. *2021 American Control Conference (ACC)*. USA, 2021. pp. 1–7.
17. Dini M., Mohammadikaleibar A., Hashemi S., Nourani V. Stochastic long-term reliability of water distribution networks using Monte Carlo simulation. *Urban Water Journal*, 2021. DOI: 10.1080/1573062X.2021.1971264
18. Zhaoxi Liu, Lingfeng Wang. Leveraging network topology optimization to strengthen power grid resilience against cyber-physical attacks. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2021, vol. 12, no. 2, pp. 1552–1564.
19. Gaogao Dong, Ting Qing, Lixin Tian, Ruijin Du, Jingjing Li. Optimization of crude oil trade structure: a complex network analysis. *Complexity*, 2021, 11 p. Available at: <https://doi.org/10.1155/2021/3480546> (accessed 9 September 2023).
20. Kumar A., Kansal M.L. Discussion of 'Reliability Analysis of Water Distribution Systems' by Gupta R. and Bhawe P.R. *Journal of Environmental Engineering*, 1995, pp. 674–677.

21. Tricarico C., Gargano R., Kapelan Z., Savić D.A., De Marinis G. Economic level of reliability for the rehabilitation of hydraulic networks. *Journal of Civil Engineering and Environmental Systems*, 2006, vol. 23, pp. 191–207.
22. Zhukovsky E., Raigorodsky A.M. Random graphs: models and limiting characteristics. *Successes of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 70, no. 1 (421), pp. 35–88. (In Russ.)
23. Colbourn Ch.J. *The combinatorics of network reliability*. New York, Oxford University Press, 1987. 160 p.
24. Shooman A.M., Kershenbaum A. Exact graph-reduction algorithms for network reliability analysis. *IEEE Global Telecommunications Conference GLOBECOM'91*. New York, IEEE Press, 1991. pp. 1412–1420.
25. Martnez S.P., Calvino B.O., Rocco S.C. All-terminal reliability evaluation through a monte carlo simulation based on an MPI implementation. *European Safety and Reliability Conference: Advances in Safety, Reliability and Risk Management (PSAM 2011/ESREL 2012)*. Helsinki, 2012. pp. 1–6.
26. Rodionov A.S., Rodionova O.K. Random hypernets in reliability analysis of multilayer networks. *J. Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2015, vol. 343, pp. 307–315.
27. Rodionov A.S., Rodionova O.K. Using random hypernets for reliability analysis of multilevel networks. *1<sup>st</sup> Int. Conf. on Mathematical Methods and Computational Techniques in Science and Engineering (MMCTSE 2014). Ser. Mathematical Methods in Science and Engineering*. Athens, Greece, 2014. pp. 119–121.
28. Rodionov A.S., Kalney A.M. Reliability polynomials in optimizing placement of base stations in monitoring networks. *Proc. of the XIV International Scientific-Technical Conference. Actual Problems of Electronic Instrument Engineering*. Novosibirsk, Russia, 2018. pp. 252–259.
29. Toktoshov G.Y., Yurgenson A.N., Migov D.A. Complexity analysis of optimization problems of utility communications networks. *T-Comm*, 2020, vol. 14, no. 9, pp. 17–23. (In Russ.)
30. Batenkov A.A., Batenkov K.A., Fokin A.B. The probability of connecting a telecommunications network is based on the reduction of several incoherent events to a combination of independent events. *Information and Control Systems*, 2021, vol. 6, pp. 53–63. (In Russ.)

#### Information about the authors

**Gulzhigit Y. Toktoshov**, Cand. Sc., Associate Professor, Chief Specialist, Ministry of Education and Sciences of the Kyrgyz Republic, 257, Tynystanov street, Bishkek, 720040, Kyrgyz Republic. tgi\_tok@rambler.ru; <https://orcid.org/0000-0001-7697-7713>

**Denis A. Migov**, Cand. Sc., Senior Researcher, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of SB RAS, 6, Academician Lavrentyev avenue, Novosibirsk, 630090, Russian Federation. mdinka@rav.sccc.ru; <https://orcid.org/0000-0003-3386-4641>

Received: 11.09.2023

Revised: 19.01.2024

Accepted: 31.05.2024