

УДК 519.635.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРИСТЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ НАНОПЛАСТИН С УЧЕТОМ ВЛАЖНОСТИ

Крысько Антон Вадимович¹,
anton.krysko@gmail.com

Калуцкий Леонид Александрович¹,
leon199703@gmail.com

Захарова Алёна Александровна²,
zaawmail@gmail.com

Крысько Вадим Анатольевич¹,
tak@san.ru

¹ Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 15.

² Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Россия, 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65.

Актуальность. Изучается проблема напряженно-деформированного состояния и несущей способности пористых металлических нанопластин с учётом больших деформаций, а именно в нефтегазовой промышленности для очистки от твёрдых фракций стволов скважин в процессе их обустройства и обеспечения притока флюида при эксплуатации; а также в аэрокосмической, медицинской промышленности, приборостроении и др. Пористые металлические фильтры в виде пластин предлагаются применять в качестве фильтров для удаления твёрдых частиц в стволе добывающих скважин в призабойной зоне пласта с целью повышения эффективности фильтрации мультифазного флюида и снижения рисков аварийности.

Цель: разработка новой модели пористых нанопластин с учётом влажности. Разработанная модель позволяет описывать реальные работы изучаемых объектов в нефтегазовой промышленности и других отраслях; построение эффективных и быстродействующих методов исследования пористых металлических нанопластин.

Методы: метод вариационных итераций – расширенный метод Канторовича, обладающий высокой точностью решения нелинейных задач, быстродействием. Корректность применения этого метода обусловлена доказательством теорем его сходимости, принадлежащих авторам. Кроме того, полученные решения сопоставляются с решениями, полученными методом Бубнова–Галеркина в высших приближениях и методом конечных разностей второго порядка точности, а также с решениями, полученными другими авторами.

Результаты и выводы. Построена модель пористых гибких нанопластинок с учётом влажности. Нанозффекты описываются по модифицированной моментной теории упругости. Дается дальнейшее развитие метода вариационных итераций применительно к исследованию напряженно-деформированного состояния пористых металлических нанопластин при больших деформациях. Анализируются типы пористости материала, размерно-зависимый нанопараметр, распределение влажности, показатель пористости и граничные условия на несущую способность пористых металлических пластин. Выявлен тип пористого материала, имеющий наибольшую несущую способность.

Ключевые слова:

Пористые металлические нанопластины, очистка от твердых фракций при освоении и эксплуатации скважин, типы пористости, влияние влажности, модифицированная моментная теория упругости, метод вариационных итераций.

Введение

Обеспечение безаварийной работы добывающих нефтяных и газовых скважин является важной задачей, а снижение ресурсоемкости добычи углеводородов достигается при применении новых технологий, обеспечивающих эффективную работу в экстремальных условиях, к которым относятся высокое давление, температура и влажность. При освоении скважин необходима очистка призабойной зоны пласта от твердых фракций, качество очистки влияет на работоспособность оборудования и сокращает сроки вывода на промышленные притоки флюида. Рассмотрим требования, предъявляемые к материалам для производства таких фильтров.

По сравнению с плотными твердыми металлами, пористые металлы имеют низкую плотность, боль-

шую удельную площадь поверхности, хорошее поглощение энергии. Пористые металлы обладают хорошим теплообменом, радиационными свойствами, превосходным звукопоглощением, хорошим проникновением и инфильтрационными свойствами.

Пористые материалы могут демонстрировать комплексные физико-механические свойства и использоваться в различных отраслях промышленности: нефтехимической, нефтегазовой, биоинженерной, аэрокосмической, электронной и коммуникационной, транспортной, атомной энергетике, медицине, охране окружающей среды, металлургии, машиностроении. Это обусловлено их широкими возможностями, такими как разделение/фильтрация потока, звукопоглощение и шумоподавление, демпфирование, электромагнитное экранирование, теплоизоляция и огнестойкость [1–9]. Пористые металлы могут быть пре-

вращены в фильтры, жидкостные сепараторы, теплообменники, радиаторы тепла, огнестойкие, глушители, демпферы, пористые электроды, катализаторы и их носители, человеческие имплантаты.

Металлические пены с открытыми ячейками обладают хорошей проницаемостью и могут быть превращены в фильтры [1]. Пористый металлический фильтр может удалять твердые частицы в жидкости (масло, криоген, расплав полимера и суспензия) или в газовой среде (воздух). Распространёнными формами фильтра являются: трубка, панель, лист, пластина, чашка и колпачок [10]. При использовании капиллярного эффекта осуществляется селективное проникновение жидкости в некоторые фильтрующие материалы и может быть достигнуто разделение газ–жидкость и жидкость–жидкость [10].

Кроме нефтегазодобывающей промышленности, пористые металлы применяются для широкого спектра задач в ряде отраслей промышленности. Например, в аэрокосмической промышленности пористые нержавеющие стали используются для очистки гидравлического масла в гироскопах и газа в автоматических топливных магистралях, а также рециркуляции катализаторов в углеводородном процессе.

Спрос на пористые материалы с высокотемпературными свойствами, способностью к высокому давлению и коррозионной стойкостью растет в нефтехимии, текстильной и бумажной промышленности. Например, пористые углеродистые материалы используются для удаления песка и грязи во время бурения нефтяных скважин, а железные пены могут разделять нефть и воск при нефтепереработке.

Пористые металлические конструкции – пластины и оболочки – анализируются в работах [11–20]. В работе [11] решаются задачи о смятии и прогибе круглой пористой пластины с шарнирно прикреплённым краем, находящейся под радиальным равномерным сжатием и равномерно распределенной нагрузкой с использованием метода Бубнова–Галеркина (Bubnov–Galerkin method (BGM)) в первом приближении, такое решение является сугубо приближенным. При этом рассматривается тип распределения пор, когда максимальная пористость находится в центре пластины.

Изогеометрический анализ эффекта малых размеров для линейных и нелинейных реакций пористой микропластины из металлической пены с помощью модифицированной теории парных напряжений проводится в работах [12–15]. Свойства материала микропластины из металлической пены получены на основе трех моделей изменения пористости, а именно равномерного, симметричного и асимметричного изменения по толщине микропластины. Исследовано влияние различных параметров, включая распределение пористости, коэффициент пористости, отношение длины к толщине, граничные условия и параметр масштаба длины, на изгибание микропластины. Шаблон с симметричной пористостью имеет наилучшие характеристики линейного и нелинейного откликов [12].

Анализ нелинейного смятия и реакции после смятия несовершенных пористых пластин и оболочек проведен в работах [16, 17]. Предполагается, что по-

ристые материалы с модулями упругости изменяются по толщине пластины в соответствии с двумя различными типами распределения. Управляющие уравнения получены на основе классической теории оболочек с учетом нелинейности фон Кармана и начального геометрического несовершенства. Явные соотношения кривых нагрузка–прогиб для прямоугольных пористых пластин определяются с помощью метода BGM в первом приближении, что также является приближенным решением. Анализируется влияние распределений пористости, коэффициента пористости, граничных условий и несовершенств на поведенье пластин после смятия. Результаты показывают, что критические нагрузки смятия уменьшаются с увеличением коэффициента пористости [16].

В работе [18] проводится исследование изгибания геометрически несовершенных нанобалок из металлической пены с симметричным и асимметричным распределением пористости. В работе [19] проведен анализ колебаний пористых нанопластин из керамики и металла с учетом влажности с использованием метода BGM. Показано, что нанопоры и изменение влажности оказывают заметное влияние на частоты колебаний наноразмерных пластин.

Нелинейный анализ изгибания несовершенных цилиндрических оболочек из пористой металлической пены при осевом сжатии проведен в [20]. Для оболочек из металлической пены пористость распределена равномерно, симметрично и асимметрично в направлении толщины. С использованием теории оболочек Донелла–Кармана получены нелинейные уравнения равновесия. Критическая нагрузка смятия и кривые равновесия смятия для совершенных и несовершенных оболочек решаются с помощью процедуры BGM, решение также получено в первом приближении и является приближенным. Анализируется влияние коэффициента пористости, несовершенств, распределения пористости и геометрии на поведение цилиндрической оболочки при смятии.

Приведённый выше анализ работ, посвященных пористым металлическим нанопластинам, чрезвычайно ограничен. Решения, полученные методом BGM в первом приближении, являются приближенными и могут не соответствовать выводам, приведенным в работах.

В настоящем исследовании разработана модель пористых металлических гибких нанопластин. Для полученных дифференциальных уравнений проведено доказательство существования решения, а численные решения статических задач пористых металлических нанопластин осуществляются методом вариационных итераций – расширенный метод Канторовича (variational iterations method – extended Kantorovich method (VIM)). Для данного метода существует доказательство его сходимости [21], и в ряде работ показана его эффективность [22–26], причем решение, полученное с помощью метода VIM, можно считать точными. Следует отметить, что VIM обладает высокой скоростью решения. Достоверность результатов демонстрируется совпадением решений, полученных VIM и BGM в высших приближениях (исследуется сходимость этого метода для функций и вторых про-

изводных), а также методом конечных разностей второго порядка точностей (finite difference method of second order of accuracy (FDM)) (также исследуется сходимость этого метода для функций и вторых производных). В настоящей работе исследуются эффекты nano-размерного параметра, типа пористости материала, показателя пористости и граничных условий.

Математическая модель металлических пористых гибких нанопластин

Рассмотрим прямоугольную в плане пластинку, которая описывается как трехмерное тело

$$\Omega \in \left\{ 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2} \right\}$$

длиной a , шириной b и постоянной толщины h . Средняя поверхность при $z=0$ обозначена как $S = \{x, y / (x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$ (рис. 1).

Для получения исходных уравнений приняты следующие гипотезы:

- 1) гипотеза Киргофа;
- 2) геометрическая нелинейность учитывается по теории Теодора фон Кармана;
- 3) наноэффекты – по модифицированной моментной теории упругости Янга [27];
- 4) материал пластины пористый, упругий, свойства которого изменяются по z : модуль Юнга $E=E(z)$, коэффициент Пуассона $\mu=\mu(z)$ и коэффициент влажностного расширения $\beta=\beta(z)$. Приняты три модели пористости [28], которые описываются степенными функциями:

- однородная пористость ПМ 1 (ПМ – пористый металл) (рис. 1, 2):

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m - E_m \Gamma / 2, \\ \mu(z) &= \mu_m - \mu_m \Gamma / 2, \\ \beta(z) &= \beta_m - \beta_m \Gamma / 2, \end{aligned} \quad (1)$$

- повышенная пористость от верхней и нижней поверхностей к центру ПМ 2 (рис. 1, 2):

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m - E_m (1/2 - |z|/h) \Gamma, \\ \mu(z) &= \mu_m - \mu_m (1/2 - |z|/h) \Gamma, \\ \beta(z) &= \beta_m - \beta_m (1/2 - |z|/h) \Gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

- уменьшенная пористость от верхней и нижней поверхностей к центру ПМ 3 (рис. 1, 2):

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m - E_m |z| \Gamma / h, \\ \mu(z) &= \mu_m - \mu_m |z| \Gamma / h, \\ \beta(z) &= \beta_m - \beta_m |z| \Gamma / h, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь E_m, μ_m, β_m – модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент влажностного расширения металла; Γ – показатель пористости. В работе [28] обосновано изменение параметра $\Gamma \in [0; 0,4]$, 0 – отсутствие пор.

На рис. 2 показано изменение модуля Юнга по толщине пластины в зависимости от типа распределения пор для показателя пористости $\Gamma=0,2; 0,4$. Цветовая гамма кривых указана на рис. 2.

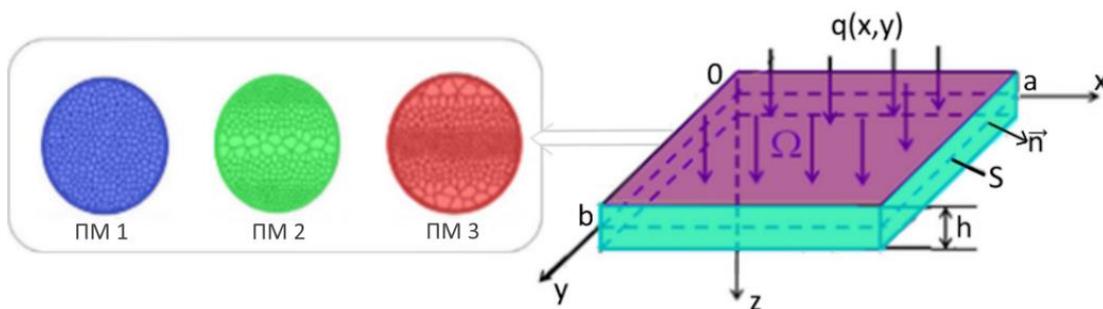


Рис. 1. Прямоугольная в плане нанопластинка из пористого металла

Fig. 1. Rectangular in plan nanoplatelet made of porous metal

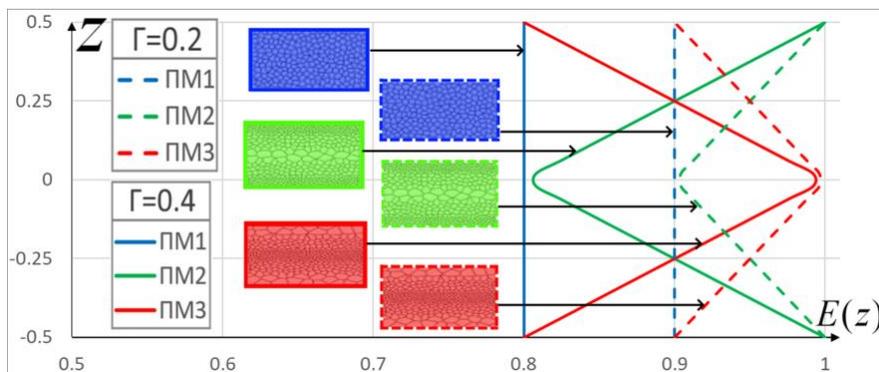


Рис. 2. Изменение модуля Юнга по толщине пластины в зависимости от типа распределения пор (1–3)

Fig. 2. Young's modulus variation along the plate thickness depending on the type of pore distribution (1–3)

Выражение упругой энергии имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \underbrace{m_{xx} \chi_{xx} + m_{yy} \chi_{yy} + m_{xy} \chi_{xy}} \right) d\Omega. \quad (4)$$

В выражении (4) первые три слагаемых – слагаемые классической теории, подчеркнутые слагаемые описываются по модифицированной моментной теории упругости – учитываются моменты высшего порядка;

$$W = \iint_S q(x, y) w(x, y) dS,$$

$$K = \frac{1}{2} \int_S \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dz dS$$

– работа внешних сил и кинетическая энергия соответственно; $w(x, y)$ – функция прогиба; $\rho(z)$ – плотность материала; $q(x, y)$ – поперечная нагрузка на пластинку.

Согласно гипотезе Кирхгофа и Т. фон Кармана, деформации произвольной точки пластинки вычисляются по формулам (5):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно закону Гука и теории Янга,

$$\sigma_{xx} = \frac{E(z)}{1 - \mu(z)^2} \left[\varepsilon_{xx} - \mu(z) \varepsilon_{yy} - \beta(z) C(x, y, z) \right],$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E(z)}{1 - \mu(z)^2} \left[\varepsilon_{yy} - \mu(z) \varepsilon_{xx} - \beta(z) C(x, y, z) \right],$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E(z)}{2(1 + \mu(z))} \varepsilon_{xy}, \quad m_{xy} = \frac{-E(z)}{2(1 + \mu(z))} l^2 \chi_{xy},$$

$$m_{xx} = \frac{E(z)}{(1 + \mu(z))} l^2 \chi_{xx}, \quad m_{yy} = \frac{E(z)}{(1 + \mu(z))} l^2 \chi_{yy},$$

$$\chi_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (6)$$

где σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} обозначают компоненты классического тензора напряжений; m_{xx} , m_{yy} , m_{xy} – моменты высшего порядка девиаторной части симметричного тензора; χ_{xx} , χ_{yy} , χ_{xy} – компоненты симметричного тензора кривизны; $C(x, y, z)$ – распределение влажности; $\beta(z)$ – коэффициент влажностного расширения. В законе Гука (6) влажность учитывается подчеркнутыми членами в выражении для σ_{xx} , σ_{yy} , что в конечном итоге приводит к дифференциальным уравнениям (8) с учетом влажности, которую важно учитывать для пористых структур.

Используя принцип Остроградского–Гамильтона (7)

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(-U + W + K) dt = 0, \quad (7)$$

получим систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных движения пори-

стых металлических нанопластин в смешанной форме относительно функций прогиба $w(x, y)$ и функции напряжений $F(x, y)$. Для задач статики уравнения типа Донелла–Кармана в безразмерной форме запишутся как (8), черточки над безразмерными параметрами для простоты опущены:

$$\begin{cases} D \left(\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\lambda^2 \partial y^4} \right) - \\ - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) = q - \Delta M_c, \\ \left(\lambda^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\lambda^2 \partial y^4} \right) + \\ + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{В уравнениях (8) } D = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{E(z)z^2}{1 - \mu^2(z)} + \frac{l^2}{1 + \mu(z)} \right) dz -$$

цилиндрическая жёсткость с учетом нанопараметра l – размерно-зависимого коэффициента; $l=0$ – для классической теории и $l \in (0; 1]$ – для нанопластин с учётом модифицированной моментной теории [11],

$M_c(x, y) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\beta(z)E(z)}{(1 - \mu(z))} \Delta C(x, y, z) z dz$ – влажностный момент [19].

В работе рассматриваются следующие граничные условия.

I. Шарнирное опирание по контуру на гибкие несжимаемые (нерастяжимые) касательные плоскости ребра [29]

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad \text{для } x = 0; 1, \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad \text{для } y = 0; 1. \end{aligned} \quad (9)$$

II. Свободное опирание по контуру [29]

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{для } x = 0; 1, \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{для } y = 0; 1. \end{aligned} \quad (10)$$

III. Защемление по контуру пластинки:

$$w(x, y)|_{\bar{n}=0} = F(x, y)|_{\bar{n}=0} = \frac{\partial w}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{n}} = 0, \quad (11)$$

где \bar{n} – нормаль к контуру пластинки.

IV. Защемление по контуру на гибкие нерастяжимые (несжимаемы) касательные плоскости ребра [29]

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad \text{для } x = 0; 1, \\ w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad \text{для } y = 0; 1, \end{aligned} \quad (12)$$

визуализация граничных условий (9)–(12) приведена в табл. 1.

Таблица 1. Визуализация граничных условий

Table 1. Visualization of boundary conditions

Граничные условия/Boundary conditions			
(9)	(10)	(11)	(12)

Параметр l позволяет учитывать особенности микроструктуры материала и передавать эффект размера. Нанопластиной является пластинка, толщина которой находится в нано диапазоне $h < 1000$ нм. В работе [30] и в настоящей работе величина размерно зависимого нанопараметра составляет $l = 2,9$ нм. В настоящей работе при проведении численных экспериментов для нанопластины принято безразмерное значение $\bar{l} = 0,4$, что соответствует $h = l / \bar{l} = 7,25$ нм.

Уравнения (8)–(12) приведены к безразмерному виду следующим образом

$$\bar{w} = \frac{w}{h}, \bar{F} = \frac{F}{E_m h}, \bar{E} = \frac{E}{E_m}, \lambda = \frac{a}{b},$$

$$\bar{l} = \frac{l}{h}, \bar{x} = \frac{x}{a}, \bar{y} = \frac{y}{b}, \bar{q} = q \frac{a^2 b^2}{E h^4}, \quad (13)$$

черточки над безразмерными параметрами в (8)–(12) для простоты опущены.

Методы решения и достоверность получаемых результатов

Для получения достоверных решений применим к уравнениям (8)–(12) несколько методов, различных по своей структуре: вариационные методы (вариационный метод BGM в высших приближениях); сеточный метод FDM; вариационно-сеточный метод (метод вариационных итераций в первом приближении (VIM 1) и во втором приближении (VIM 2)). При получении решения VIM 1 в первом приближении накладывалось ограничение идеи Фурье о разделении переменных, а при решении VIM 2 рассматривалась уже двухчленная аппроксимация основных функций. Считаем, что решения, полученные с помощью VIM 2, обладают самой высокой точностью, так как на каждом шаге нагружения строится набор функций, удовлетворяющих искомому дифференциальным уравнениям, в то время как в методе BGM в его классической постановке задается набор функций, удовлетворяющих соответствующим условиям, а в сеточном методе FDM решения существенно зависят от числа разбиения области S . Эффективность метода VIM была продемонстрирована как для полноразмерных структур, так и для наноструктур в работах [21–26].

При применении метода BGM система аппроксимирующих функций для краевых условий (9) была принята в виде

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{i,j} \sin(i\pi x) \sin(j\pi y),$$

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N B_{i,j} \sin(i\pi x) \sin(j\pi y). \quad (14)$$

После применения метода BGM к системе (8) получаем систему N^2 нелинейных алгебраических уравнений относительно $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, которая решается методом Ньютона–Рафсона. Исследуем сходимость решения в зависимости от количества аппроксимирующих функций N в (14) (табл. 2).

К системе (8) с соответствующими краевыми условиями применим сеточный метод конечных разностей второго порядка точности, что сводит нелинейные уравнения в частных производных (8) к системе $2n^2$ нелинейных алгебраических уравнений (n – число узлов сетки на оси x и y), которая решалась методом Ньютона–Рафсона.

Также к системе (8) применим VIM в первом VIM 1 и втором VIM 2 приближениях. Представим функции w , F , согласно идее Фурье о разделении переменных, как сумму произведений функций, каждая из которых зависит от одной координаты x , y

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i(x) \tilde{y}_i(y), \quad F(x, y) = \sum_{i=1}^N X_i(x) Y_i(y). \quad (15)$$

На первом шаге функции $\tilde{x}(x)$, $X(x)$ задаются исходя из удовлетворения граничным условиям (замечание: функции можно задать произвольным образом, не удовлетворяя краевым условиям). Тогда после применения метода BGM по координате x получим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений $2N$ относительно $\tilde{y}(y)Y(y)$, которая методом конечных разностей второго порядка точности сводится к системе $2n$ нелинейных алгебраических уравнений и решается методом Ньютона–Рафсона. Полученный набор функций $\tilde{y}(y)Y(y)$ теперь считаем аппроксимирующим, и применяется процедура BGM по координате y , как и в предыдущем решении, и процесс продолжается пока решения на двух последовательных итерациях не совпадут в пределах принятой точности вычислений. Идея метода вариационных итераций – расширенного метода Канторовича – подробно описана в работах [21–26], доказательство сходимости решения дано в работе [21]. Такая постановка решения задач теории гибких пористых металлических нанопластинок является корректной и точной, так как каждая из вычислительных процедур имеет доказательство сходимости.

Замечание: результаты, полученные при первой итерации в методе вариационных итераций VIM, по сути дела, есть решение, полученное с помощью вариационного метода Канторовича–Власова (Kantorovich-Vlasov method (KVM)).

На рис. 3, 4 представлены зависимости $q[w(0,5;0,5)]$ для квадратной $\lambda=1$ пластинки при дей-

ствии равномерно распределённой нагрузки для граничных условий (9), полученные методами (BGM $N=7$, VIM 1, VIM 2, FDM) для пористой металлической пластинки ПМ 1 при $\Gamma=0,2$ (рис. 3), а также решения, полученные в работе [31] методом возмущений, и решения, полученные методом KVM для сплошной пластины без пор $\Gamma=0$ (рис. 4). На рис. 4 также представлены функции $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ при $y=0,5$ и

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Рис. 3. Зависимость $q[w(0,5;0,5)]$ пористой пластинки ПМ 1 ($\Gamma=0,2$)

Рис. 4. Зависимость $q[w(0,5;0,5)]$ однородной металлической пластинки ($\Gamma=0$)

Сопоставление решений для непористых металлических пластинок проводилось не только для равномерно-распределенной нагрузки, но и для локальной нагрузки. В табл. 2 представлены решения прогиба $w(0,25;0,25)$ для локальной нагрузки интенсивностью $q_0=300$, полученные методами (BGM $N=7$, VIM 1, VIM 2, FDM) с погрешностью относительно метода VIM 2 $\Delta_1 = \left| \frac{w_{vim2} - w_{max}}{w_{vim2}} \right| \cdot 100\%$, где w_{vim2} – максимальный прогиб, полученный методом VIM 2, а w_{max} – максимальный прогиб, полученный соответствующим методом (указанным в первом столбце) в табл. 2. Решение, полученное VIM 2, в табл. 2 принято эталонными и выделено синим цветом. Также в таблице указано число итераций I , необходимое для сходимости метода вариационных итераций. Замечание: сходимость методов существенно зависит от типа нагрузки. Для равномерно распределенной нагрузки при решении VIM 1 для сходимости решения достаточное число итераций $I=4$, а для локальной нагрузки в четверти необходимо $I=7$.

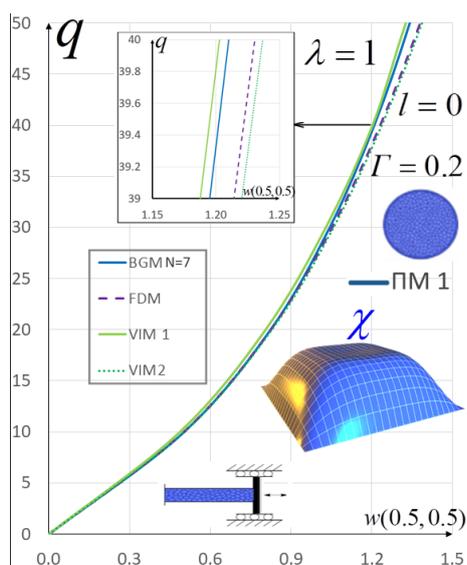


Рис. 3. Зависимость $q[w(0,5;0,5)]$ пористой пластинки ПМ 1 ($\Gamma=0,2$)

Fig. 3. Dependence $q[w(0,5;0,5)]$ of the porous plate PM 1 (Porous metal) ($\Gamma=0,2$)

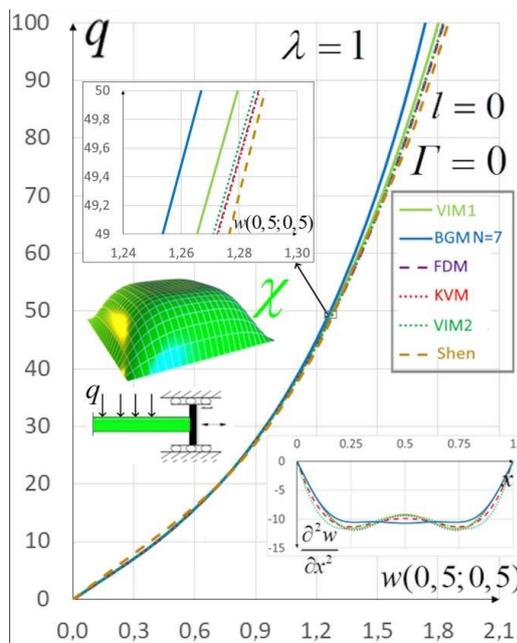


Рис. 4. Зависимость $q[w(0,5;0,5)]$ однородной металлической пластинки ($\Gamma=0$)

Fig. 4. Dependence $q[w(0,5;0,5)]$ of the homogeneous metal plate ($\Gamma=0$)

Анализ табл. 2 позволяет сделать вывод, что результаты, полученные с помощью метода VIM 2, являются точными и время, затраченное на их получение, является минимальным относительно методов BGM ($N=7$), FDM ($n \cdot n^2=4082$). В решении, полученном VIM 2, функции прогиба и усилий представляются в виде ряда (15), в то время как VIM 1 – это одночленное приближение – идея Фурье. Для практического приложения (равномерно-распределенной нагрузки) можно ограничиться VIM 1, так как на графиках $q[w(0,5;0,5)]$, приведенных на рис. 3, 4, для равномерно распределенной нагрузки решения, полученные методами VIM 1 и VIM 2, практически совпали и время расчета является минимальным. Решения, полученные методами VIM 1, VIM 2 для равномерно распределенной нагрузки, совпали не только для основных функций, но и для их производных до второго порядка включительно. Решения, полученные VIM 1, приведенные на рис. 4, совпали с решениями, полученными Shen и др. [31].

Исследование напряженно-деформированного состояния пористых металлических нанопластинок в условиях влажности

Исследуем изгибание квадратной $\lambda=1$ нанопластины описываемых системой нелинейных дифференциальных уравнений (8) при действии равномерно распределённой поперечной нагрузки с учетом влажности $C(x,y)=C_0 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ для пластинок, изготовленных для трех типов пористых материалов, описанных выше (ПМ 1, ПМ 2, ПМ 3), для граничных условий (9)–(12). Расчеты проводились для пластины из алюминия для безразмерных параметров (13) $\bar{E}_m = 1, \mu_m=0,3, \beta_m=0,44$ [19, 32].

Таблица 2. Сравнение методов решения

Table 2. Comparison of solution methods

Тип нагрузки Type of load	Локальная нагрузка в четверти пластины/Local load in the quarter plate $q=q_0=300$ при (for) $x \in [0, 125; 0,375]$, $y \in [0, 125; 0,375]$, $\Gamma=0$, $\lambda=1$, $l=0$			
Методы Methods	$w(0,25;0,25)$	Погрешность относительно VIM2, % Error relative to VIM2 $\Delta_1 = \left \frac{w_{vim2} - w_{max}}{w_{vim2}} \right \cdot 100 \%$	Время расчёта, с Calculation time, sec	Число алгебраических уравнений Number of algebraic equations
BGM $N=2$	0,705	11,10	0,17	$N \cdot N \cdot 2=8$
BGM $N=5$	0,771	2,77	92,8	$N \cdot N \cdot 2=50$
BGM $N=7$	0,771	2,77	195,8	$N \cdot N \cdot 2=98$
FDM $n=33$	0,898	13,24	750	$n \cdot n \cdot 2=2178$
FDM $n=49$	0,860	8,45	4050	$n \cdot n \cdot 2=4082$
VIM 1 $n=97$, $l=7$	0,772	2,65	15,3	$n \cdot 2=194$
VIM 1 $n=121$, $l=7$	0,772	2,65	25,3	$n \cdot 2=242$
VIM 2 $n=49$, $l=5$	0,793	0,00	16,4	$2n \cdot 2=196$
VIM 2 $n=73$, $l=5$	0,793	0,00	26,7	$2n \cdot 2=292$

Решения получены методом вариационных итераций в первом приближении VIM 1, обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения на каждой итерации решались методом конечных разностей второго порядка точностей при разбиении интервала интегрирования для $n=97$. Нелинейная система алгебраических уравнений, как и в предыдущем параграфе, решалась методом Ньютона–Рафсона.

На рис. 5, а (граничные условия (10)) и б (граничные условия (11)) приведены графики $q[w(0,5;0,5)]$ для

полноразмерной ($l=0$) квадратной ($\lambda=1$) пластинки при действии постоянной равномерно-распределенной поперечной нагрузки для показателя пористости $\Gamma=0,4$ и трех типов пористости (ПМ 1, ПМ 2, ПМ 3), а также поверхности $w(x,y)$, $\chi(x,y)$, цвет кривых соответствует типам пористости, изображенным на рис. 5. Сплошные линии – решения получены без учета влажности пластинки ($C_0=0$), пунктирные – для пластин с влажностью ($C_0=6$).

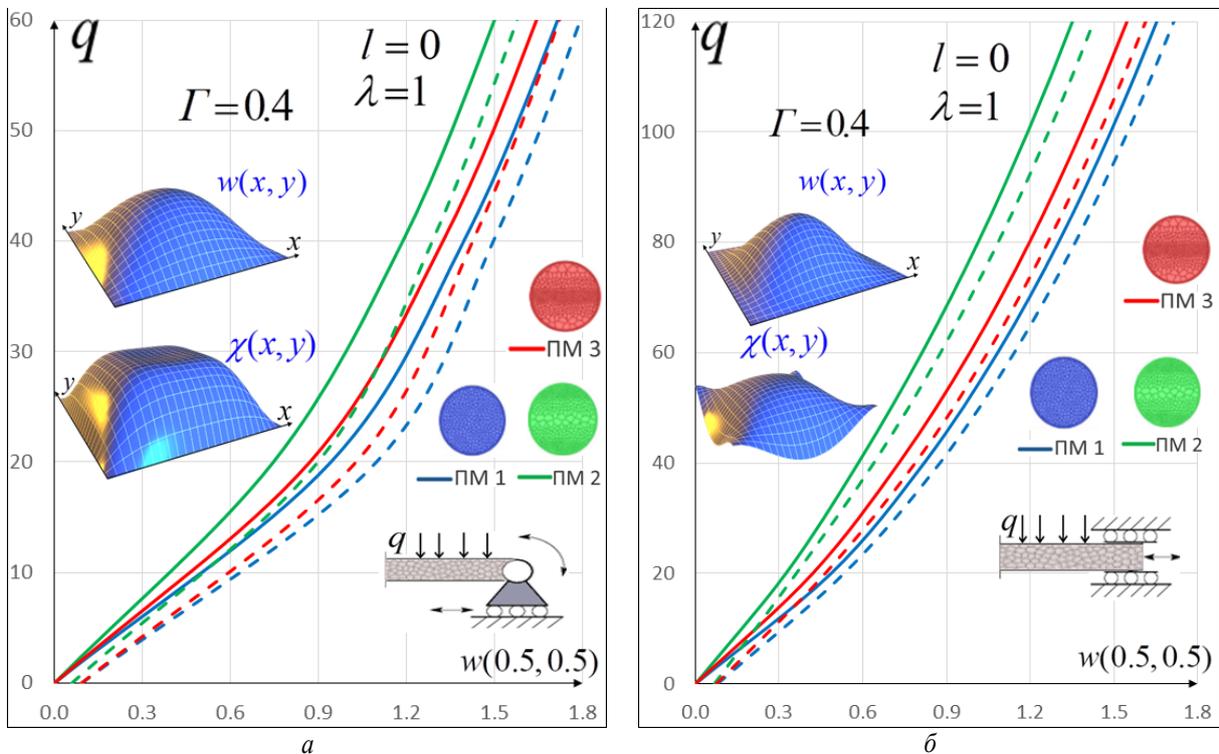


Рис. 5. Зависимость $q[w(0,5;0,5)]$ квадратной ($\lambda=1$) полноразмерной ($l=0$) пластинки с учетом влажности $C_0=6$ и без учета $C_0=0$, $\Gamma=0,4$ для граничных условий: а) (10); б) (11)

Fig. 5. Dependence $q[w(0,5;0,5)]$ of the square ($\lambda=1$) full-size ($l=0$) plate with $C_0=6$ and without $C_0=0$ moisture, for boundary conditions: a) (10); b) (11)

Из результатов, представленных на рис. 5 и в табл. 3, можно сделать вывод, что пластины с типом пористости ПМ 2 имеют наибольшую несущую способность по сравнению с двумя другими типами пористости, причем наименьшую несущую способность имеет пластина с пористостью ПМ 1 для граничных условий (9)–(12). Учет влажности ($C_0=6$) при расчете гибких полноразмерных пористых (ПМ 1, ПМ 2, ПМ 3) пластинок приводит к уменьшению их несущей способности для всех рассматриваемых краевых условий (9)–(12). Следует также отметить, что влажность изменяет напряженно-деформируемое состояние пластины даже при отсутствии поперечной нагрузки, на что указывают зависимости $q[w(0,5;0,5)]$, приведенные на рис. 4 и в табл. 3.

Исследуем влияние размерно зависимого параметра ($l=0,4$) и влажности $C(x,y)=C_0\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ на напряженно-деформируемое состояние пористых металлических нанопластин для двух типов пористости (ПМ 1, ПМ 2). На рис. 6 представлены зависимости $q[w(0,5;0,5)]$ для квадратной ($\lambda=1$) металлической нанопластины ($l=0,4$) при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки для граничных условий (9), (11). Сплошные линии – решения получены без учета влажности пластинки ($C_0=0$), пунктирные – для пластин с влажностью ($C_0=6$). Условные обозначения типа пористости эпюр $w(x,y)$, $\chi(x,y)$ приведены на рис. 6 для $\Gamma=0,4$.

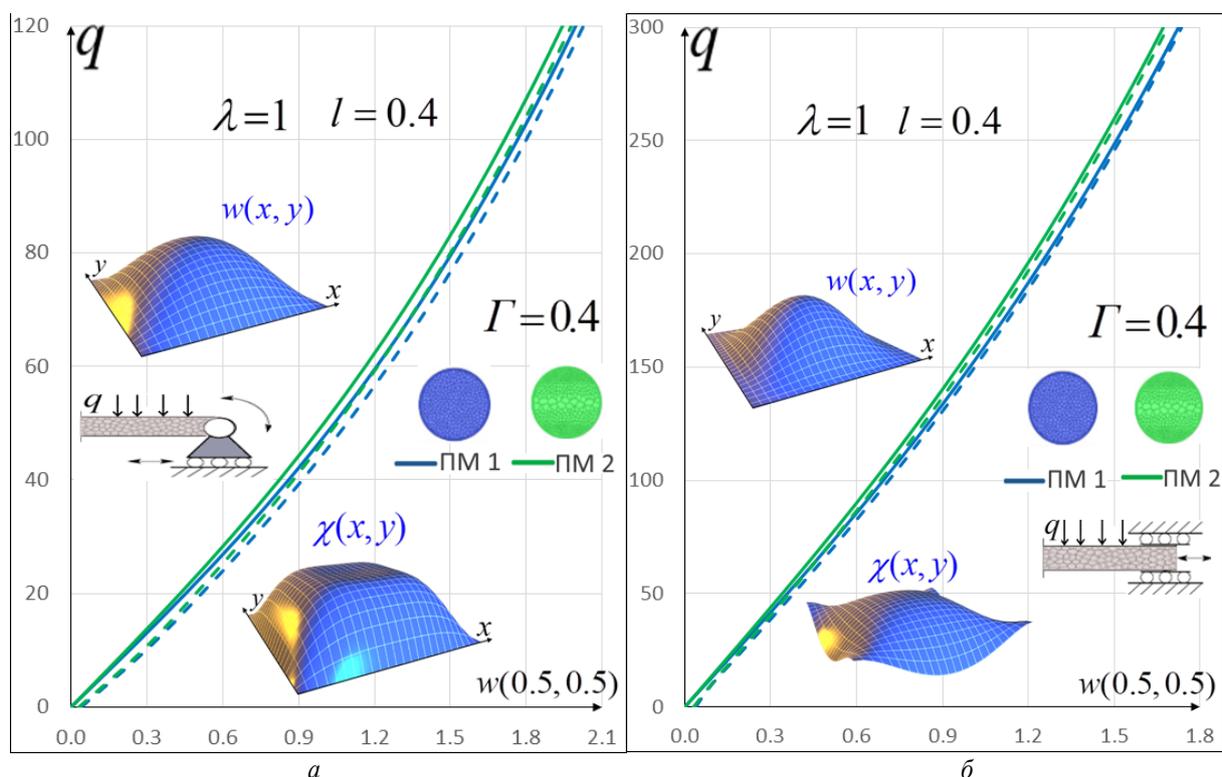


Рис. 6. Зависимость $q[w(0,5;0,5)]$ квадратной ($\lambda=1$) нанопластины ($l=0,4$) с учетом влажности $C_0=6$ и без учета $C_0=0$, $\Gamma=0,4$ для граничных условий: а) (10); б) (11)

Fig. 6. Dependence $q[w(0,5;0,5)]$ of the square ($\lambda=1$) nanoplate ($l=0,4$) with $C_0=6$ and without $C_0=0$ moisture, for boundary conditions: a) (10); b) (11)

В табл. 3 представлены прогибы в центре пластины $w(0,5;0,5)$ и различия в прогибах полноразмерной и нанопластины $\Delta_2 = \frac{(l_0 - l_n)}{l_0} \cdot 100\%$, где $l_0 = w(0,5;0,5)$ – прогибы полноразмерной пластины (при $l=0$); $l_n = w(0,5;0,5)$ – прогибы нанопластины (при $l=0,4$), различия в прогибах Δ_2 в табл. 3 выделены синим цветом.

Анализ полученных результатов (рис. 5, 6), в которых представлена зависимость прогиба $w(0,5;0,5)$ от равномерно распределенной нагрузки q и прогибов в центре пластины $w(0,5;0,5)$ при $q=0$ и $q=60$, $l=0;0,4$ (табл. 3), позволяет сделать вывод, что учет нанопараметра $l=0,4$ для трех типов пористости (ПМ 1, ПМ 2,

ПМ 3) при расчете металлических пористых нанопластин существенно влияет на напряженно-деформированное состояние пластинок и различия в прогибах полноразмерной и нанопластины Δ_2 составляет более 55 % при нагрузке $q=60$ для всех рассматриваемых типов пористости и граничных условий (9)–(12), причём тип пористости также оказывает серьёзное влияние на напряженно-деформированное состояние пластин: для нанопластин при $l=0,4$ различие между типами пор ПМ 1 и ПМ 2 составляет менее 20 % для нанопластин при $q=0$ и более 40 % для полноразмерных пластин. Влажность изменяет напряженно-деформируемое состояние как полноразмерных, так и нанопластин даже при отсутствии поперечной нагрузки.

Таблица 3. Прогобы $w(0,5;0,5)$ пористых квадратных ($\lambda=1$) пластин с учетом влажности ($C_0=6$), граничные условия (9)–(12) при $\Gamma=0,4$

Table 3. Deflections $w(0,5;0,5)$ of porous square ($\lambda=1$) plates considering moisture ($C_0=6$), boundary conditions (9)–(12) at $\Gamma=0,4$

Граничные условия Boundary conditions	q	w(0,5;0,5)								
		ПМ 1			ПМ 2			ПМ 3		
		l=0	l=0,4	$\Delta_2, \%$	l=0	l=0,4	$\Delta_2, \%$	l=0	l=0,4	$\Delta_2, \%$
(9)	0	0,1304	0,0779	40,26	0,0819	0,0665	18,80	0,1201	0,0752	37,39
(10)		0,1331	0,0779	41,47	0,0824	0,0665	19,30	0,1212	0,0753	37,87
(11)		0,0519	0,0279	46,24	0,0332	0,0238	28,31	0,0438	0,0269	38,58
(12)		0,0517	0,0278	46,23	0,0331	0,0237	28,40	0,0437	0,0268	38,67
(9)	60	1,6617	0,6829	58,90	1,5992	0,6570	58,92	1,6416	0,7133	56,55
(10)		1,7905	0,6632	62,96	1,5754	0,6337	59,78	1,7195	0,6690	61,09
(11)		1,4391	0,4498	68,74	1,2151	0,4284	64,74	1,3578	0,4541	66,56
(12)		1,2093	0,4445	63,24	1,0707	0,4240	60,40	1,1631	0,4485	61,44

Исследуем напряженно-деформируемое состояние квадратных $\lambda=1$ нанопластин, описываемых системой нелинейных дифференциальных уравнений (8), при действии равномерно распределённой поперечной нагрузки $q=50$ с влажностью $C(x,y)=C_0\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ для пластинок, изготовленных из пористых материалов ПМ 1, для граничных условий (9). Построены зависимости величины прогиба в центре пластины $w(0,5;0,5)$ от показателя пористости Γ (рис. 7). Решения получены методом вариационных итераций в первом приближении для $n=97$. Расчеты проводились для пористой пластины из алюминия для безразмерных параметров (13) $\bar{E}_m=1, \mu_m=0,3, \beta_m=0,44, \lambda=1$.

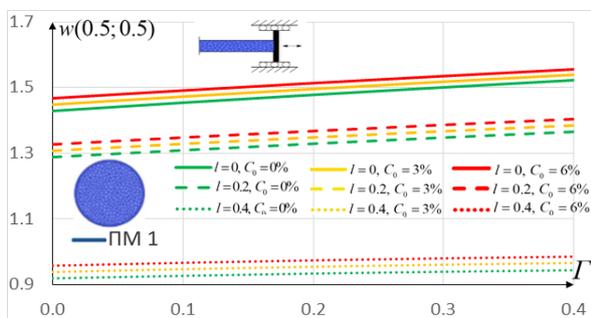


Рис. 7. Зависимость прогиба в центре пластинки $w(0,5;0,5)$ от параметра Γ для граничных условий (9) для пористой структуры ПМ 1 при действии равномерно распределённой нагрузки $q=50$

Fig. 7. Dependence of deflection in the center of the plate $w(0,5;0,5)$ on the parameter for boundary conditions (9) for porous structure PM 1 under the action of uniformly distributed load $q=50$

Согласно результатам, представленным на рис. 7 и в табл. 3, можно сделать вывод, что для граничных условий (9) увеличение размерно-зависимого нанопараметра существенно увеличивает несущую способность пористых пластин ПМ 1, так для нанопластины при $l=0,4$ прогиб уменьшается более чем на 35 % относительно полноразмерной пластины $l=0$. Показатель пористости, отвечающий за объём пор в материале, также влияет на несущую способность пластин. При увеличении показателя пористости от $\Gamma=0$ (от-

сутствие пор) до $\Gamma=0,4$ величина прогиба возрастает на 6,4 % для пластины с пористостью ПМ 1. Стоит отметить, что таким образом пластины ПМ 2 имеют наибольшую несущую способность, а пластины ПМ 1 наименьшую. Воздействие влажности также увеличивает прогиб пластин. Для распределения влажности $C(x,y)=C_0\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ прогиб при $C_0=6$ больше прогиба при $C_0=0$ на 2,6 % при действии равномерно распределённой нагрузки $q=50$.

Построим зависимости величины усилий $N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ в центре пластины $N_x(0,5;0,5)$ от показателя пористости Γ при действии равномерно распределённой поперечной нагрузки $q=50$ и распределении влажности $C(x,y)=C_0\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ (рис. 8). Решения уравнений (8) получены методом вариационных итераций в первом приближении для $n=49$ для граничных условий (11). Расчеты проводились для пористой пластины из алюминия $\bar{E}_m=1, \mu_m=0,3, \lambda=1$.

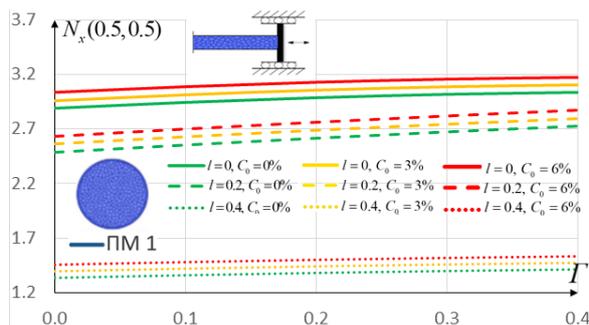


Рис. 8. Зависимость усилий в центре пластинки $N_x(0,5;0,5)$ от параметра Γ для граничных условий (9) для пористой структуры ПМ 1 при действии равномерно распределённой нагрузки $q=50$

Fig. 8. Force dependence in the center of the plate $N_x(0,5;0,5)$ from the parameter Γ for boundary conditions (9) for porous PM 1 structure under the action of uniformly distributed load $q=50$

Из анализа результатов, представленных на рис. 8, сделан вывод, что увеличение размерно-зависимого нанопараметра от $l=0$ до $l=0,4$ приводит к уменьшению усилий $N_x(0,5;0,5)$ на 51–54 %. Увеличение пара-

метра C_0 от $C_0=0$ до $C_0=6$ при распределением влажности $C(x,y)=C_0\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ приводит к увеличению усилий в центре $N_x(0,5;0,5)$ на 5 % при действии равномерно распределённой нагрузки $q=50$. При увеличении показателя пористости от $\Gamma=0$ до $\Gamma=0,4$ величина усилий в центре $N_x(0,5;0,5)$ возрастает на 5 % для пластин с пористостью ПМ 1.

Заключение

Пористые углеродные металлические полноразмерные и нанопластинки широко применяются в различных отраслях современной техники, они являются составными элементами приборов (в частности, пористых металлических фильтров) в нефтегазодобывающей отрасли и других отраслях промышленности. Применение таких материалов позволяет значительно сократить стоимость обустройства добывающих скважин, когда нужно осуществлять очистку призабойной зоны продуктивного пласта от твердых фракций, что сокращает срок службы и безаварийный период службы электроцентробежных насосов, а также позволяет снизить сроки очистки ствола скважины в призабойной зоне и вывода скважин на проектные уровни добычи углеводородов.

Для этого в работе обоснована необходимость построения модели, которая бы давала возможность учесть различные, в том числе агрессивные, факторы среды. Целью работы является создание новой модели и эффективных методов расчёта напряженно-деформированного состояния пористых металлических полноразмерных и нанопластин с учетом влажности.

1. Для решения исходных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных разработано несколько алгоритмов, основанных на методах BGM, FDM, VIM. Проведен сравнительный анализ решений, полученных данными методами. Достоверность и эффективность разработанных методов подтверждается в частном случае сопоставлением с известными результатами [31]. Полученные результаты дают возможность утверждать, что наиболее эффективным методом исследования гибких пористых металлических

нанопластин является метод вариационных итераций – расширенный метод Канторовича.

2. Учет влажности при расчете гибких металлических пористых полноразмерных и нанопластинок приводит к уменьшению несущей способности пластинок при действии поперечной равномерно-распределенной нагрузки. Несущая способность пористых нанопластин с учетом влажности уменьшается для всех рассматриваемых в работе типов пористости. При этом учет влажности приводит к появлению начальных деформаций, даже при отсутствии нагрузки. Это демонстрируется на графиках $q[w(0,5;0,5)]$, приведенных на рис. 5, 6 и в табл. 3, как для полноразмерных ($l=0$), так и для нанопластин ($l=0,4$).
3. Учет нанопараметра $0 < l \leq 0,4$ увеличивает несущую способность пористых металлических нанопластин вне зависимости от краевых условий.
4. Тип пористости существенно влияет на несущую способность металлических пористых полноразмерных и нанопластинок с учетом или без учета влажности. Наибольшей несущей способностью обладают пластинки с максимальным распределением пор в центре пластины – тип пор ПМ 2. Наименьшей несущей способностью обладают пластинки с равномерным распределением пор – тип пористости ПМ 1. Различия между прогибами в центре для пластин с типами ПМ 2 и ПМ 1 более 30 %.
5. Величина показателя пористости Γ в (1)–(3) влияет на несущую способность металлических гибких полноразмерных и нанопластин, увеличение показателя пористости от $\Gamma=0$ до $\Gamma=0,4$ приводит к увеличению прогиба от 1,8 до 6 % для граничных условий (9).

Результаты данной работы могут применяться для решения широкого спектра задач в областях биоинженерной, аэрокосмической, электронной, транспортной, атомной энергетики, медицине, металлургии и машиностроения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00160, <https://rscf.ru/project/22-11-00160>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu P.S. Introduction to porous materials. – Beijing: Tsinghua University Press, 2004. – 299 p.
2. Tang H., Zhang Z. Developmental states of porous metal materials // Rare Metal Materials and Engineering. – 1997. – V. 26. – № 1. – P. 1–6.
3. Huang P.Y. Principles of powder metallurgy. – Beijing: Metallurgical Industry Press, 1997. – 396 p.
4. Banhart J. Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams // Progress in materials science. – 2001. – V. 46. – № 6. – P. 559–632.
5. Liu P.S., Liang K.M. Review. Functional materials of porous metals made by P/M, electroplating and some other techniques // Journal of materials science. – 2001. – V. 36. – P. 5059–5072.
6. Lj G., Ashby M. Cellular solids: structure and properties // Cambridge solid state science series. – 1997. – V. 1. – P. 510–515.
7. Davies G.J., Zhen S. Metallic foams: their production, properties and applications // Journal of Materials science. – 1983. – V. 18. – P. 1899–1911.
8. Degischer H.P., Kriszt B. Handbook of cellular metals. – Weinheim: Wiley-VCH, 2002. – V. 71. – 398 p.
9. Zeng H.M. General introduction to high technology and new materials. – Beijing: China Science and Technology Press, 1993. – 280 p.
10. On the mechanical performance of closed cell Al alloy foams / Y. Sugimura, J. Meyer, M.Y. He, H. Bart-Smith, J. Grenstedt, A.G. Evans // Acta materialia. – 1997. – V.45. – № 12. – P. 5245–5259.
11. Magnucka-Blandzi E.E. Axi-symmetrical deflection and buckling of circular porous-cellular plate // Thin-walled structures. – 2008. – V. 46. – № 3. – P. 333–337.
12. Small size-effect isogeometric analysis for linear and nonlinear responses of porous metal foam microplate / T. Cuong-Le, M. Hoang-Le, A.J.M. Ferreira, M.A. Wahab // Composite Structures. – 2022. – V. 285. – P. 115–189.
13. Pham-Tan H., Thai C.H., Phung-Van P. NURBS-based refined plate theory for metal foam plates with porosities // Thin-Walled Structures. – 2022. – V. 175. – P. 109–246.
14. Scale-dependent nonlocal strain gradient isogeometric analysis of metal foam nanoscale plates with various porosity distributions /

- P. Phung-Van, A.J.M. Ferreira, H. Nguyen-Xuan, C.H. Thai // Composite Structures. – 2021. – V. 268. – P. 1–11.
15. A nonlocal strain gradient isogeometric nonlinear analysis of nanoporous metal foam plates / P. Phung-Van, A.J.M. Ferreira, H. Nguyen-Xuan, C.H. Thai // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2021. – V. 130. – P. 58–68.
 16. Nonlinear buckling and post-buckling analysis of imperfect porous plates under mechanical loads / T.M. Tu, L.K. Hoa, D.X. Hung, L.T. Hai // Journal of Sandwich Structures & Materials. – 2020. – V. 22. – № 6. – P. 1910–1930.
 17. Nonlinear bending analysis of fgp plates under various boundary conditions using an analytical approach / P.T. Tung, N. Van Long, T.M. Tu, N.T. Phuong, T.N. Long // Structures. – 2021. – P. 4803–4813.
 18. Barati M.R., Zenkour A.M. Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions // Composite Structures. – 2017. – V. 182. – P. 91–98.
 19. Shahverdi H., Barati M.R. Vibration analysis of porous functionally graded nanoplates // International Journal of Engineering Science. – 2017. – V. 120. – P. 82–99.
 20. Toan T.P., Nguyen-Thoi T., Lee J. Mechanical stability of metal foam cylindrical shells with various porosity distributions // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2020. – V. 27. – № 4. – P. 295–303.
 21. Review of the methods of transition from partial to ordinary differential equations: From macro-to nano-structural dynamics / J. Awrejcewicz, V.A. Krysko-Jr, L.A. Kalutsky, M.V. Zhigalov, V.A. Krysko // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2021. – V. 28. – P. 1–33.
 22. Computing static behavior of flexible rectangular von Karman plates in fast and reliable way / J. Awrejcewicz, V.A. Krysko Jr, L.A. Kalutsky, V.A. Krysko // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2022. – V. 146. – P. 104–162.
 23. Application of variational iterations method for studying physically and geometrically nonlinear kirchhoff nanoplates: a mathematical justification / A.D. Tebyakin, L.A. Kalutsky, T.V. Yakovleva, A.V. Krysko // Axioms. – 2023. – V. 12. – № 4. – P. 1–21.
 24. Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates / V.A. Krysko Jr, J. Awrejcewicz, L.A. Kalutsky, V.A. Krysko // Computers & Mathematics with Applications. – 2023. – V. 133. – P. 61–84.
 25. Mathematical modeling and methods of analysis of generalized functionally gradient porous nanobeams and nanoplates subjected to temperature field / J. Awrejcewicz, A.V. Krysko, A. Smirnov, L.A. Kalutsky, M.V. Zhigalov, V.A. Krysko // Meccanica. – 2022. – V. 57. – № 7. – P. 1591–1616.
 26. Physical nonlinearity in porous functionally graded Kirchhoff nano-plates: modeling and numerical experiment / V.A. Krysko-Jr, J. Awrejcewicz, M.V. Zhigalov, A.D. Tebyakin, V.A. Krysko // Applied Mathematical Modelling. – 2023. URL: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.06.026> (дата обращения 01.06.2023).
 27. Thermo-mechanical post-buckling of FGM cylindrical panels with temperature-dependent properties / J. Yang, K.M. Liew, Y.F. Wu, S. Kitipornchai // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – V. 43. – № 2. – P. 307–324.
 28. Modified couple stress-based geometrically nonlinear oscillations of porous functionally graded microplates using NURBS-based isogeometric approach / F. Fan, Y. Xu, S. Sahmani, B. Safaei // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2020. – V. 372. – P. 11–34.
 29. Исанбаева Ф.С., Корнишин М.С. Большие прогибы пластин со свободно смешивающимися краями // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1965. – V. 3. – P. 3–17.
 30. Malikan M. Electro-mechanical shear buckling of piezoelectric nanoplate using modified couple stress theory based on simplified first order shear deformation theory // Applied Mathematical Modelling. – 2017. – V. 48. – P. 196–207.
 31. Shen H. Nonlinear bending of shear deformable laminated plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations // Composite structures. – 2000. – V. 50. – № 2. – P. 131–142.
 32. Mashat D.S., Zenkour A.M., Radwan A.F. A quasi-3D higher-order plate theory for bending of FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loads with porosity // European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2020. – V. 82. – P. 39–85.

Поступила: 08.06.2023 г.

Прошла рецензирование: 24.07.2023 г.

Информация об авторах

Крысько А.В., доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Калуцкий Л.А., младший научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Захарова А.А., доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории киберфизических систем, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук.

Крысько В.А., доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории моделирования гетерофазных материалов, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

UDC 519.635.8

MATHEMATICAL MODELING OF POROUS GEOMETRICALLY NONLINEAR METAL NANO-PLATES TAKING INTO ACCOUNT MOISTURE

Anton V. Krysko¹,
anton.krysko@gmail.com

Leonid A. Kalutsky¹,
leon199703@gmail.com

Alena A. Zakharova²,
zaawmail@gmail.com

Vadim A. Krysko¹,
tak@san.ru

¹ Lavrentiev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 15, Akademik Lavrentiev avenue, Novosibirsk, 630090, Russia.

² Trapeznikov Institute of Control Problems, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 65, Profsoyuznaya street, Moscow, 117997, Russia.

The relevance. The study of stress-strain behaviour and bearing capacity of porous metallic nanoplates, especially under extreme conditions and taking into account large deformations, is of great importance. These structures have a wide range of practical applications, for example, to clean solid fractions in wells during their setting up and to ensure fluid flow during operation. In addition, porous metal filters in the form of plates can serve as effective filters for removing solids from production wellbores, especially in the bottomhole zone. The versatility of these materials extends to various industries including aerospace, medical and instrumentation, indicating their potential to solve critical problems and advance technologies in various fields.

The main aim of the research is to develop a new model of porous nanoplates, taking into account moisture, which would describe the real work of the studied objects in the oil and gas industry and other industries; to construct the efficient and fast methods for studying porous metallic nanoplates.

Methods: variational iterations method, an extended Kantorovich method, which has high accuracy of solution of nonlinear problems and fast performance. The correctness of application of this method is conditioned by the proof of its convergence theorems belonging to the authors. In addition, the obtained solutions are compared with the solutions obtained by the Bubnov–Galerkin method in higher approximations and by the finite difference method of the second order of accuracy, as well as with the solutions obtained by other authors.

Results. A model of porous flexible nanoplates is constructed taking into account moisture. Nano effects are described by the modified moment theory of elasticity. The method of variational iterations is further developed for the study of the stress-strain state of porous metallic nanoplates at large deflections. The paper analyzes the types of material porosity, size-dependent nano parameter, moisture distribution, porosity index and boundary conditions on the bearing capacity of porous metal plates. The type of porous material with the highest bearing capacity is identified.

Key words:

Porous metal nanoplates, purification from solid fractions during well development and operation, types of porosity, effects of moisture, modified moment elasticity theory, method of variational iterations.

The study was supported by the Russian Science Foundation Grant No. 22-11-00160, <https://rscf.ru/project/22-11-00160>.

REFERENCE

- Liu P.S. *Introduction to porous materials*. Beijing, Tsinghua University Press, 2004. 299 p.
- Tang H., Zhang Z. Developmental states of porous metal materials. *Rare Metal Materials and Engineering*, 1997, vol. 26, no. 1, pp. 1–6.
- Huang P.Y. *Principles of powder metallurgy*. Beijing, Metallurgical Industry Press, 1997. 396 p.
- Banhart J. Manufacture characterisation and application of cellular metals and metal foams. *Progress in materials science*, 2001, vol. 46, no. 6, pp. 559–632.
- Liu P.S., Liang K.M. Review. Functional materials of porous metals made by P/M, electroplating and some other techniques. *Journal of materials science*, 2001, vol. 36, pp. 5059–5072.
- Lj G., Ashby M. Cellular solids: structure and properties. *Cambridge solid state science series*, 1997, vol. 71, pp. 510–530.
- Davies G.J., Zhen S. Metallic foams: their production, properties and applications. *Journal of Materials science*, 1983, vol. 18, pp. 1899–1911.
- Degischer H.P., Kriszt B. *Handbook of cellular metals*. Weinheim, Wiley-VCH, 2002. Vol. 71, 398 p.
- Zeng H.M. *General introduction to high technology and new materials*. Beijing, China Science and Technology Press, 1993. 280 p.
- Sugimura Y., Meyer J., He M.Y., Bart-Smith H., Grenstedt J., Evans A.G. On the mechanical performance of closed cell Al alloy foams. *Acta materialia*, 1997, vol. 45, no. 12, pp. 5245–5259.
- Magnucka-Blandzi E.E. Axi-symmetrical deflection and buckling of circular porous-cellular plate. *Thin-walled structures*, 2008, vol. 46, no. 3, pp. 333–337.
- Cuong-Le T., Hoang-Le, M., Ferreira, A.J.M., Wahab M.A. Small size-effect isogeometric analysis for linear and nonlinear responses of porous metal foam microplate. *Composite Structures*, 2022, vol. 285, pp. 115–189.
- Pham-Tan H., Thai C. H., Phung-Van P. NURBS-based refined plate theory for metal foam plates with porosities. *Thin-Walled Structures*, 2022, vol. 175, pp. 109–246.
- Phung-Van P., Ferreira A.J.M., Nguyen-Xuan H., Thai C.H. Scale-dependent nonlocal strain gradient isogeometric analysis of metal

- foam nanoscale plates with various porosity distributions. *Composite Structures*, 2021, vol. 268, pp. 1–11.
15. Phung-Van P., Ferreira A.J.M., Nguyen-Xuan H., Thai C.H. A nonlocal strain gradient isogeometric nonlinear analysis of nanoporous metal foam plates. *Engineering Analysis with Boundary*, 2021, vol. 130, pp. 58–68.
 16. Tu T.M., Hoa L.K., Hung D.X., Hai L.T. Nonlinear buckling and post-buckling analysis of imperfect porous plates under mechanical loads. *Journal of Sandwich Structures Materials*, 2020, vol. 22, no. 6, pp. 1910–1930.
 17. Tung P.T., Van L.N., Tu T.M., Phuong N.T.B., Long T.N. Nonlinear bending analysis of fgp plates under various boundary conditions using an analytical approach. *Structures*, 2021, vol. 28, pp. 4803–4813.
 18. Barati M.R., Zenkour A.M. Investigating post-buckling of geometrically imperfect metal foam nanobeams with symmetric and asymmetric porosity distributions. *Composite Structures*, 2017, vol. 182, pp. 91–98.
 19. Shahverdi H., Barati M.R. Vibration analysis of porous functionally graded nanoplates. *International Journal of Engineering Science*, 2017, vol. 120, pp. 82–99.
 20. Toan T.P., Nguyen-Thoi T., Lee J. Mechanical stability of metal foam cylindrical shells with various porosity distributions. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2020, vol. 27, no. 4, pp. 295–303.
 21. Awrejcewicz J., Krysko-Jr V.A., Kalutsky L.A., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Review of the methods of transition from partial to ordinary differential equations: from macro-to nano-structural dynamics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2021, vol. 28, pp. 1–33.
 22. Awrejcewicz J., Krysko Jr V.A., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Computing static behavior of flexible rectangular von Karman plates in fast and reliable way. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2022, vol. 146, pp. 104–162.
 23. Tebyakin A.D., Kalutsky L.A., Yakovleva T.V., Krysko A.V. Application of variational iterations method for studying physically and geometrically nonlinear Kirchhoff nanoplates: a mathematical justification. *Axioms*, 2023, vol. 12, no. 4, pp. 1–21.
 24. Krysko Jr V.A., Awrejcewicz J., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates. *Computers & Mathematics with Applications*, 2023, vol. 133, pp. 61–84.
 25. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Smirnov A., Kalutsky L.A., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Mathematical modeling and methods of analysis of generalized functionally gradient porous nanobeams and nanoplates subjected to temperature field. *Meccanica*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1591–1616.
 26. Krysko-Jr V.A., Awrejcewicz, J., Zhigalov M.V., Tebyakin A.D., Krysko V.A. Physical nonlinearity in porous functionally graded Kirchhoff nano-plates: modeling and numerical experiment. *Applied Mathematical Modelling*, 2023. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.06.026> (accessed 1 June 2023).
 27. Yang J., Liew K.M., Wu Y.F., Kitipornchai S. Thermo-mechanical post-buckling of FGM cylindrical panels with temperature-dependent properties. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, no. 2, pp. 307–324.
 28. Fan F., Xu Y., Sahmani S., Safaei B. Modified couple stress-based geometrically nonlinear oscillations of porous functionally graded microplates using NURBS-based isogeometric approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 372, pp. 11–34.
 29. Isanbaeva F.S., Kornishin M.S. Large deflections of plates with freely shifting edges. *Studies in plate and shell theory*, 1965, vol. 3, pp. 3–17. In Rus.
 30. Malikanb M. Electro-mechanical shear buckling of piezoelectric nanoplate using modified couple stress theory based on simplified first order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, vol. 48, pp. 196–207.
 31. Shen H.S. Nonlinear bending of shear deformable laminated plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations. *Composite structures*, 2000, vol. 50, no. 2, pp. 131–142.
 32. Mashat D.S., Zenkour A.M., Radwan A.F. A quasi-3D higher-order plate theory for bending of FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loads with porosity. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2020, vol. 82, pp. 39–85.

Received: 8 June 2023.
Reviewed: 24 July 2023.

Information about the authors

Anton V. Krysko, Dr. Sc., leading researcher, Lavrentiev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

Leonid A. Kalutsky, junior researcher, Lavrentiev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

Alena A. Zakharova, Dr. Sc., chief researcher, Trapeznikov Institute of Control Problems, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

Vadim A. Krysko, Dr. Sc., chief researcher, Lavrentiev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.