УДК 519.2

ОПТИМАЛЬНАЯ ПЕРЕДАЧА СИГНАЛА ПО СОВОКУПНОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО КАНАЛОВ С ПАМЯТЬЮ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.В. Рожкова

Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Рассматривается задача оптимальной передачи стохастических процессов по непрерывно-дискретным каналам с памятью и запаздыванием. Доказываются экстремальные свойства оптимальных кодирований в смысле максимизации количества информации.

Ключевые слова:
Сигнал, стохастические системы, канал передачи, память, запаздывание.
Key words:
Signal, stochastic systems, transmission channel, memory, lag.

1. Постановка задачи

Данная работа является развитием результатов [1, 2].

Сигнал x_t, сообщение на выходе канала передачи z_t и сообщение на выходе дискретного канала передачи $\eta(t_m)$ задаются на реализациях процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t = F(t)x_t dt + \Phi_1(t)dw_t,\ \ p_0(t) = \mathbf{N}\{x;\mu_0,\gamma_0\}.$$

1 случай:

$$dz_t = h(t,x_t,x_\tau,z)dt + \Phi_2(t)dv_t,$$
$$\eta(t_m) = g(t_m,x_\tau,z) + \Phi_3(t_m)\xi(t_m),$$

т. е. наблюдаемый непрерывный процесс z_t обладает фиксированной памятью единичной кратности (N=1, $\tau_1=\tau$), а наблюдаемый дискретный канал $\eta(t_m)$ – с запаздыванием при наличии мгновенной бесшумной обратной связи по процессу z_t.

2 случай:

$$dz_t = h(t,x_\tau,z)dt + \Phi_2(t)dv_t,$$
$$\eta(t_m) = g(t_m,x_{t_m},x_\tau,z) + \Phi_3(t_m)\xi(t_m).$$

т. е. наблюдаемый непрерывный процесс z_t с запаздыванием, а наблюдаемый дискретный канал $\eta(t_m)$ обладает фиксированной памятью единичной кратности (N=1,$\tau_1=\tau$) при наличии мгновенной бесшумной обратной связи по процессу z_t.

Используемые обозначения: $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $\mathbf{M}\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\mathbf{N}\{a;b\}$ – плотность нормального распределения с параметрами a и b; $\Phi_1^2(t)=Q(t)$, $\Phi_2^2(t)=R(t)$, $\Phi_3^2(t_m)=V(t_m)$.

Задача: в классе кодирующих функционалов $\mathbf{K}=\{\mathbf{H};\mathbf{G}\}=\{h(\cdot),\ g(\cdot)\}$, удовлетворяющих энергетическим ограничениям

$$\mathbf{M}\{h^2(t,x_t,x_\tau,z)\} \le \tilde{h}(t) \le \tilde{h},$$
$$\mathbf{M}\{g^2(t_m,x_{t_m},x_\tau,z)\} \le \tilde{g}(t_m) \le \tilde{g},$$

найти функционалы $h^0(\cdot)$ и $g^0(\cdot)$, обеспечивающие относительно задачи фильтрации минимальную ошибку декодирования $\Delta^0(t)=\inf\Delta(t)$, где $\Delta(t)=\mathbf{M}\{[x_t-\hat{x}(t,z,\eta)]^2\}$ является ошибкой оценки фильтрации $\hat{x}(t,z,\eta)$ процесса x_t, которая соответствует принятому сообщению $\{z_0^t;\eta_0^m\}$ при заданных $h(\cdot)$, $g(\cdot)$. Так как при заданных $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой фильтрации является апостериорное среднее $\mu(t)=\mathbf{M}\{x_t|z_0^t;\eta_0^m\}$, то $\Delta^0(t)\ge\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$, где $\gamma(t)\ge\mathbf{M}\{[x_t-\mu(t)]^2|z_0^t;\eta_0^m\}$. Таким образом $\Delta^0(t)=\inf\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$.

2. Основные результаты

Теорема 1. На классе $\mathbf{K}_l^{0,1}=\{\mathbf{H}_l;\mathbf{G}_l^1\}$ линейных функционалов

$$\mathbf{H}_l = \left\{\begin{aligned} &h(\cdot): h(t,x_t,x_\tau,z) = \\ &= h(t,z) + H_0(t,z)x_t + H_1(t,z)x_\tau \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{G}_l^1 = \{g(\cdot): g(t_m,x_\tau,z) = g(t_m,z) + G_1(t_m,z)x_\tau\}:$$

1) оптимальные кодирующие функционалы $h^0(\cdot)$, $g^0(\cdot)$ имеют представления

$$\begin{aligned} &h^0(t,z^0) = -H_0^0(t,z^0)\mu^0(t), \\ &H_0^0(t,z^0) = [\tilde{h}(t)/\Delta^0(t)]^{1/2}, \\ &H_1^0(t,z^0) = 0, \\ &g^0(t_m,z^0) = -G_1^0(t_m,z^0)\mu^0(\tau,t_m-0), \\ &G_1^0(t_m,z^0) = [\tilde{g}(t_m)/\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)]^{1/2}; \end{aligned} \qquad (2)$$

2) оптимальное сообщение $\{z_t^0;\eta^0(t_m)\}$ определяется формулами

$$dz_t^0 = [\tilde{h}(t)/\Delta^0(t)]^{1/2}[x_t-\mu^0(t)]dt + \Phi_2(t)dv_t,$$
$$\eta^0(t_m) = [\tilde{g}(t_m)/\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)]^{1/2}\times$$
$$\times[x_\tau-\mu^0(\tau,t_m-0)]dt + \Phi_3(t_m)\xi(t_m);$$

3) оптимальное декодирование $\mu^0(t)$ и минимальная ошибка декодирования $\Delta^0(t)$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(t) = F(t)\mu^0(t)dt + R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)/\Delta^0(t)]^{1/2}dz_t^0,$$
$$d\Delta^0(t)/dt = [2F(t) - R^{-1}(t)\tilde{h}(t)]\Delta^0(t) + Q(t)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(t_m) = \mu^0(t_m - 0) + \Delta^0_{01}(\tau, t_m - 0) \times$$
$$\times [\tilde{g}(t_m)\Delta^0_{11}(\tau, t_m - 0)]^{1/2}[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m),$$
$$\Delta^0(t_m) = \Delta^0(t_m - 0)\frac{V(t_m)}{[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]}\times$$
$$\times\left[1 + \frac{\tilde{g}(t_m)}{V(t_m)}\left(1 - \frac{(\Delta^0_{01}(\tau, t_m - 0))^2}{\Delta^0(t_m - 0)\Delta^0_{11}(\tau, t_m - 0)}\right)\right],$$

где $Q(t)=\Phi_1^2(t)$, $R(t)=\Phi_2^2(t)$, $V(t_m)=\Phi_3^2(t_m)$;

4) $$\mu^0(\tau, t) = \mathbf{M}\{x_\tau \,|(z^0)_0^t, (\eta^0)_0^m\},$$
$$\Delta^0_{11}(\tau, t) = \mathbf{M}\{[x_\tau - \mu^0(\tau, t)]^2\},$$
$$\Delta^0_{01}(\tau, t) = \mathbf{M}\{[x_t - \mu^0(t)][x_\tau - \mu^0(\tau, t)]\}$$

на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d_t\mu^0(\tau, t) = R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)/\Delta^0(t)]^{1/2}\Delta^0_{01}(\tau, t)dz^0_t, \quad (3)$$

$$d\Delta^0_{11}(\tau, t)/dt = -R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)/\Delta^0(t)](\Delta^0_{01}(\tau, t))^2, \quad (4)$$

$$d\Delta^0_{01}(\tau, t)/dt = [F(t) - R^{-1}(t)\tilde{h}(t)]\Delta^0_{01}(\tau, t), \quad (5)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(\tau, t_m) = \mu^0(\tau, t_m - 0) + [\tilde{g}(t_m)\Delta^0_{11}(\tau, t_m - 0)]^{1/2}\times$$
$$\times[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m),$$
$$\Delta^0_{11}(\tau, t_m) = V(t_m)[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1}\Delta^0_{11}(\tau, t_m - 0),$$
$$\Delta^0_{01}(\tau, t_m) = V(t_m)[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1}\Delta^0_{01}(\tau, t_m - 0).$$

Доказательство:

При заданных $\{h(\cdot);g(\cdot)\}\in\mathbf{K}_l$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ (см. [3]) $\mu(\tau,t)$ и $\gamma_{11}(\tau,t)$, $\gamma_{01}(\tau,t)$ определяются уравнениями

$$d\mu(\tau, t) =$$
$$= R^{-1}(t)[H_0(\tau, t)\gamma_{01}(\tau, t) + H_1(\tau, t)\gamma_{11}(\tau, t)], \quad (6)$$

$$d\gamma_{11}(\tau, t)/dt =$$
$$= -R^{-1}(t)[H_0(\tau, t)\gamma_{01}(\tau, t) + H_1(\tau, t)\gamma_{11}(\tau, t)]^2, \quad (7)$$

$$d\gamma_{01}(\tau, t)/dt = 2F(t)\gamma_{01}(\tau, t) -$$
$$-R^{-1}(t)[H_0(t, z)\gamma(t) + H_1(t, z)\gamma_{01}(\tau, t)]\times$$
$$\times[H_0(t, z)\gamma_{01}(\tau, t) + H_1(t, z)\gamma_{11}(\tau, t)], \quad (8)$$

с начальными условиями

$$\mu(\tau, t_m) = \mu(\tau, t_m - 0) +$$
$$+\begin{bmatrix} G_0(t_m, z)\gamma_{01}(\tau, t_m - 0) + \\ +G_1(t_m, z)\gamma_{11}(\tau, t_m - 0)\end{bmatrix}W^{-1}(t_m)\tilde{\eta}(t_m), \quad (9)$$

$$\gamma_{11}(\tau, t_m) = \gamma_{11}(\tau, t_m - 0) -$$
$$-\begin{bmatrix} G_0(t_m, z)\gamma_{01}(\tau, t_m - 0) + \\ +G_1(t_m, z)\gamma_{11}(\tau, t_m - 0)\end{bmatrix}^2 W^{-1}(t_m, z), \quad (10)$$

$$\gamma_{01}(\tau, t_m) = \gamma_{01}(\tau, t_m - 0) -$$
$$= [G_0(t_m, z)\gamma(t_m - 0) + G_1(t_m, z)\gamma_{01}(\tau, t_m - 0)]\times$$

$$\gamma_{01}(\tau, t_m) = \gamma_{01}(\tau, t_m - 0) -$$
$$= [G_0(t_m, z)\gamma(t_m - 0) + G_1(t_m, z)\gamma_{01}(\tau, t_m - 0)]\times \quad (11)$$

где

$$\mu(\tau, t) = \mathbf{M}\{x_\tau \,|z_0^t, \eta_0^m\},$$
$$\gamma_{01}(\tau, t) = \mathbf{M}\{[x_t - \mu(t)][x_\tau - \mu(\tau, t)]\,|z_0^t, \eta_0^m\},$$
$$\gamma_{11}(\tau, t) = \mathbf{M}\{[x_\tau - \mu(\tau, t)]^2\,|z_0^t, \eta_0^m\},$$
$$d\tilde{z}_t = dz_t - [h(t, z) + H_0(t, z)\mu(t) + H_1(t, z)\mu(\tau, t)]dt,$$
$$\tilde{\eta}(t_m) = \eta(t_m) -$$
$$-[g(t, z) + G_0(t, z)\mu(t_m - 0) + G_1(t, z)\mu(\tau, t_m - 0)],$$
$$W(t, z) = V(t_m) + G_0^2(t, z)\gamma(t_m - 0) +$$
$$+G_1^2(t, z)\gamma_{11}(\tau, t_m - 0) + G_1(t, z)\gamma_{01}(\tau, t_m - 0) +$$
$$+2G_0(t, z)G_1(t, z)\gamma_{01}(\tau, t_m - 0).$$

Уравнения (3)–(5) получаются как результат использования (2) в (6)–(8). Остальные утверждения Теоремы очевидным образом следуют из Теорем 1 в [1] и [2].

Теорема 2. На классе $\mathbf{K}_l^{1,0}=\{\mathbf{H}_l^1;\mathbf{G}_l\}$ линейных функционалов

$$\mathbf{H}_l^1 = \{h(\cdot) : h(t, x_\tau, z) = h(t, z) + H_1(t, z)x_\tau\}, \quad (12)$$

$$\mathbf{G}_l = \left\{\begin{matrix} g(\cdot) : g(t_m, x_{t_m}, x_\tau, z) = \\ = g(t_m, z) + G_0(t_m, z)x_{t_m} + G_1(t_m, z)x_\tau \end{matrix}\right\}:$$

1) оптимальные кодирующие функционалы $h^0(\cdot)$, $g^0(\cdot)$ имеют представления

$$h^0(t, z^0) = -H_1^0(t, z^0)\mu^0(\tau, t),$$
$$H_1^0(t, z^0) = [\tilde{h}(t)/\Delta^0_{11}(\tau, t)]^{1/2},$$
$$g^0(t_m, z^0) = -G_0^0(t_m, z^0)\mu^0(t_m - 0),$$
$$G_0^0(t_m, z^0) = [\tilde{g}(t_m)/\Delta^0(t_m - 0)]^{1/2}, \quad (13)$$
$$G_1^0(t_m, z^0) = 0;$$

2) оптимальное сообщение $\{z_t^0;\eta^0(t_m)\}$ определяется формулами

$$dz_t^0 = [\tilde{h}(t)/\Delta^0_{11}(\tau, t)]^{1/2}[x_\tau - \mu^0(\tau, t)]dt + \Phi_2(t)dv_t,$$
$$\eta^0(t_m) = [\tilde{g}(t_m)/\Delta^0(t_m - 0)]^{1/2}\times$$
$$\times[x_{t_m} - \mu^0(t_m - 0)]dt + \Phi_3(t_m)\xi(t_m);$$

3) оптимальное декодирование $\mu^0(t)$ и минимальная ошибка декодирования $\Delta^0(t)$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(t) = F(t)\mu^0(t)dt +$$
$$+R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)/\Delta^0_{11}(\tau, t)]^{1/2}\Delta^0_{01}(\tau, t)dz^0_t,$$

$$d\Delta^0(t)/dt = \begin{pmatrix} 2F(t) - R^{-1}(t)\tilde{h}(t)\times \\ \times\left[\dfrac{(\Delta^0_{01}(\tau, t))^2}{\Delta^0(t)\Delta^0_{11}(\tau, t)}\right]\end{pmatrix}\Delta^0(t) + Q(t) \quad (14)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(t_m)=\mu^0(t_m-0)+[\tilde{g}(t_m)\Delta^0(t_m-0)]^{1/2}\times$$
$$\times[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m),$$
$$\Delta^0(t_m)=V(t_m)[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}\Delta^0(t_m-0),$$

где $Q(t)=\Phi_1^2(t)$, $R(t)=\Phi_2^2(t)$, $V(t_m)=\Phi_{13}^2(t_m)$, $\mu^0(t_m-0)=\lim\mu(t)$, $\Delta^0(t_m-0)=\lim\Delta(t)$ при $t\uparrow t_m$.

4) $\mu^0(\tau,t)$ и $\Delta_{11}^0(\tau,t)$, $\Delta_{01}^0(\tau,t)$ на интервалах $t_m\leq t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(\tau,t)=R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2}dz_t^0,$$
$$d\Delta_{11}^0(\tau,t)/dt=-R^{-1}(t)\tilde{h}(t)\Delta_{11}^0(\tau,t),$$
$$d\Delta_{01}^0(\tau,t)/dt=[F(t)-R^{-1}(t)\tilde{h}(t)]\Delta_{01}^0(\tau,t)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(t_m)=\mu^0(t_m-0)+\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0)\times$$
$$\times[\tilde{g}(t_m)/\Delta^0(t_m-0)]^{1/2}[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m), \qquad (15)$$

$$\Delta_{11}^0(\tau,t_m)=\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)\frac{V(t_m)}{[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]}\times$$
$$\times\left[1+\frac{\tilde{g}(t_m)}{V(t_m)}\left(1-\frac{(\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0))^2}{\Delta^0(t_m-0)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)}\right)\right], \qquad (16)$$

$$\Delta_{01}^0(\tau,t_m)=V(t_m)[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0). \qquad (17)$$

Доказательство:

Начальные условия (15)–(17) получаются как результат использования (13) в (9)–(11). Остальные утверждения Теоремы очевидным образом следуют из Теорем 1 в [1] и [2].

Теорема 3.

1) На классе $\mathbf{K}_l^{1,0}=\{\mathbf{H}_l^1;\mathbf{G}_l\}$ вида (1) имеет место свойство

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]=\sup I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m], \qquad (18)$$

где sup берется по всем $\{h(\cdot);\ g(\cdot)\}$O$\mathbf{K}=\{\mathbf{H};\mathbf{G}\}$ и

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]=$$
$$=(1/2)\sum_{t_i\leq t}\ln[1+(\tilde{g}(t_i)/V(t_i))]+$$

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]=$$
$$=(1/2)\sum_{t_i\leq t}\ln[1+(\tilde{g}(t_i)/V(t_i))]+ \qquad (19)$$

где $D(t)=\mathbf{M}\{[x_t-a(t)]^2\}$, $a(t)=\mathbf{M}\{x_t\}$.

2) На классе $\mathbf{K}_l^{1,0}=\{\mathbf{H}_l^1;\mathbf{G}_l\}$ вида (12) имеет место свойство (18) и

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]=\frac{1}{2}\sum_{\tau\leq t_i\leq t}\ln[1+(\tilde{g}(t_i)/V(t_i))]+$$
$$+\frac{1}{2}\int_\tau^t\left[\begin{array}{l}\dfrac{\tilde{h}(\sigma)}{R(\sigma)}\dfrac{(\Delta_{01}^0(\tau,\sigma))^2}{\Delta^0(\sigma)\Delta_{11}^0(\tau,\sigma)}-\\ -Q(\sigma)\left(\dfrac{1}{\Delta^0(\sigma)}-\dfrac{1}{D(\sigma)}\right)\end{array}\right]d\sigma. \qquad (20)$$

Доказательство:

Для $t_m\leq t<t_{m+1}$ использование (10) из [1] и (48) из [2] в (47) из [2] дает, что

$$dI_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]/dt=$$
$$=(1/2)(R^{-1}(t)\tilde{h}(t)-Q(t)[(\Delta^0(t))^{-1}-D^{-1}(t)]). \qquad (21)$$

Тогда (19) следует из (51) из [2], (21). Использование (14) в (50) из [2] дает

$$I_{t_m}^0[\cdot]=I_{t_m-0}^0[\cdot]+(1/2)\ln[1+(\tilde{g}(t_m)/V(t_m))]. \qquad (22)$$

Тогда (20) следует из (49) в [2] и (22).

Заключение

Решена задача оптимальной непрерывно-дискретной передачи диффузионного гауссовского марковского сигнала по непрерывному каналу с памятью и дискретному каналу с запаздыванием, а также по непрерывному каналу с запаздыванием и дискретному каналу с памятью при наличии бесшумной обратной связи. Полученные результаты могут быть использованы для анализа пропускной способности каналов в задаче оптимальной передачи сигналов.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013, проект № 14.B37.21.0861.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рожкова С.В. Оптимальная непрерывно-дискретная передача сигнала по каналам с памятью при наличии бесшумной обратной связи // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 5. – С. 6–9.
2. Рожкова С.В. Оптимальная непрерывно-дискретная передача сигнала по каналам с запаздыванием // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 5. – С. 10–13.
3. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.

Поступила 25.01.2013 г.