

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антиобледенительные системы // Строительный сезон. – 2001. – № 5. – С. 28–33.
2. Способ удаления льда с водостоков крыш зданий и сооружений: пат. 2209906 Рос. Федерация. № 2002118385/03; заявл. 08.07.02; опубл. 10.08.03, Бюл. № 22. – 5 с.
3. ТУ 3468-007-02067824-2003. Многоэлектродные композиционные электрообогреватели (МКЭ). № Гос. рег. 004026 / Разработчик М.В. Халин. – Барнаул, 2003. – 24 с.
4. Евстигнеев В.В., Пугачев Г.А., Халина Т.М., Халин М.В. Расчет и проектирование низкотемпературных композиционных электрообогревателей. – Новосибирск: Наука, 2001. – 168 с.
5. Халин М.В. Теория и разработка низкотемпературных электрообогревателей: дис.... д-ра техн. наук. – Барнаул, 1998. – 330 с.
6. Справочник резинщика / ред. кол. П.И. Захарченко, Ф.И. Яшунская, В.Ф. Евстратов, П.Н. Орловский. – М.: Химия, 1971. – 608 с.
7. ГОСТ 20214-74. Пластмассы электропроводящие. Метод определения удельного объемного электрического сопротивления при постоянном напряжении.
8. ГОСТ 270-75. Резина. Метод определения упругопрочностных свойств при растяжении.
9. ГОСТ 415-75. Каучуки и резиновые смеси. Метод определения пластоэластичных свойств на пластомере.
10. ГОСТ 9.030-74. Резина. Методы испытания на стойкость в ненапряженном состоянии к воздействию жидких агрессивных сред.
11. Халин М.В., Востриков Е.И., Бутцев Д.В. Энергоэффективная антиобледенительная система на основе композиционных электрообогревателей // Энергообеспечение и энергосбережение – региональный аспект: Матер. докл. XII Всеросс. совещ. – Томск: Изд-во «СПБ Графикс», 2011. – С. 32–35.

Поступила 26.12.2011 г.

УДК 621.374.4/5:517

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПАРАМЕТРОМ

Р.А. Вайнштейн, Н.В. Коломиец, В.В. Шестакова

Томский политехнический университет
E-mail: vra@tpu.ru

Показано, что выполнение условия равенства среднего за период значения собственной частоты параметрических колебаний позволяет получить соотношения между электромагнитными и конструктивными параметрами делителя частоты на границе возникновения колебаний половинной частоты и в стационарном режиме. Полученные соотношения позволяют произвести расчеты с достаточной точностью.

Ключевые слова:

Делитель частоты, параметрические колебания, средняя частота.

Key words:

Frequency demultiplier, parametric variation, medium frequency.

Данная работа выполнена в связи с использованием электромагнитного параметрического делителя частоты на два в качестве основного элемента источника контрольного тока, используемого для выполнения защиты от замыканий на землю в электроустановках напряжением 6–35 кВ [1].

Электромагнитный параметрический делитель частоты является известным устройством. Впервые параметрические колебания в электрических системах были реализованы и теоретически описаны Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси [2]. Также они предложили использовать для реализации параметрических колебаний в электрических цепях индуктивность с нелинейным ферромагнитным сердечником.

Электромагнитный параметрический делитель частоты содержит два замкнутых магнитопровода из электротехнической стали А и Б, на каждом из которых нанесены по две обмотки с числом витков w_1 и w_2 , рис. 1.

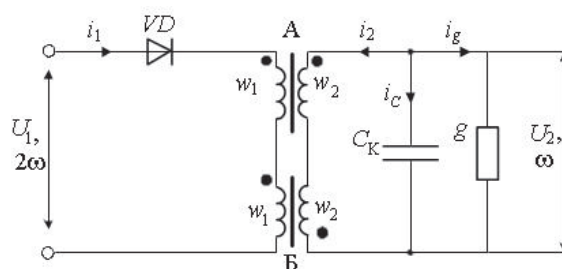


Рис. 1. Схема делителя частоты с вентилем в цепи питания

Обмотки w_1 вместе с вентилем VD образуют цепь, называемую цепью возбуждения, которая подключается к источнику переменного тока с частотой 2ω . Обмотки w_2 образуют вместе с конденсатором C_k параметрически возбуждаемый колебательный контур. Обмотки сердечников А и В соединены так, что между ними нет электромагнитной связи, и поэтому вынужденные колебания с частотой 2ω в колебательном контуре отсутствуют. Роль

обмоток w_1 при таком соединении обмоток заключается в том, что при протекании по ним переменного тока периодически изменяется магнитная проницаемость магнитопроводов, а следовательно, и индуктивность обмоток w_2 . Диод VD в цепи возбуждения необходим для того, чтобы при четной зависимости магнитной проницаемости магнитопроводов от напряженности магнитного поля обеспечить основную частоту изменения параметра (индуктивности) колебательного контура, равной частоте источника питания 2ω .

При разработке источника контрольного тока ряд важных соотношений получен на основе учета специфических свойств параметрических колебаний, их фундаментального отличия от других видов колебаний.

Параметрические колебания могут возникнуть в колебательной системе, например второго порядка, если параметр накопителя энергии (конденсатора или катушки индуктивности) под действием внешней силы изменяется периодически и между частотой этого изменения и параметрами системы имеется определенное соответствие. Параметрические колебания возникают и поддерживаются без приложения к цепи внешних источников, только за счет энергии, передаваемой посредством периодического изменения энергоемкого параметра.

Особенность параметрических колебаний позволяет классифицировать их как явление промежуточное между вынужденными колебаниями в неавтономных системах и свободными колебаниями в автономных системах. С одной стороны период параметрических колебаний определяется только параметрами системы, так как вынуждающая сила в обычном смысле отсутствует. Это роднит параметрические колебания со свободными колебаниями. С другой стороны, в отличие от чисто автономных систем, фаза параметрических колебаний не может иметь любое значение, зависящее только от случайных или искусственно созданных начальных условий. Фаза параметрических колебаний связана с фазой периодически изменяющегося параметра и может принимать несколько дискретных значений, возможное количество которых зависит от соотношения основной частоты изменения параметра и частоты параметрических колебаний.

Отмеченная двойственность параметрических колебаний впервые была сформулирована следующим образом [3]: «...колебания, хотя и являются вынужденными, все же, в известном смысле, свободны. Поддержание их зависит целиком от энергии, которая сообщается им внешней силой и, тем не менее, внешняя сила несколько не определяет и даже не изменяет заметно их периодов».

Таким образом, принципиально необходимым условием существования параметрических колебаний является равенство их частоты собственной частоте колебательного контура.

Поскольку один из параметров колебательного контура, в данном случае индуктивность, меняется в течении периода, то и мгновенное значение соб-

ственной частоты в течение периода не остается постоянным. Поэтому точнее говорить о выполнении условия равенства среднего за период значения собственной частоты частоте параметрических колебаний. Ниже показано, что использование одного этого условия позволяет получить ряд необходимых расчетных соотношений с точностью, достаточной для инженерных приложений.

Экспериментальные данные, приводимые для сравнения с расчетными, получены на делителе частоты со следующими параметрами:

- площадь поперечного сечения сердечника – $q=5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$;
- длина средней силовой линии – $l_{\text{ср}}=0,306 \text{ м}$;
- число витков обмотки возбуждения – $w_1=570$;
- число витков обмотки колебательного контура – $w_2=3000$;
- емкость конденсатора – $C_k=0,5-5 \text{ мкФ}$.
- коэффициенты аппроксимации кривой намагничивания – $\alpha=2,06 \text{ А/м}$; $\beta=4,8 \text{ Тл}^{-1}$.

Практически требуется решение двух задач. Определения количественных соотношений между электромагнитными и конструктивными параметрами делителя частоты на границе возникновения колебаний половинной частоты и в стационарном режиме.

При анализе действительная петлевая зависимость между индукцией и напряженностью поля в сердечниках делителя частоты заменяется средней кривой намагничивания, которая аппроксимируется выражением

$$h = \alpha \text{sh} \beta b,$$

где h и b – соответственно мгновенные значения напряженности магнитного поля и индукции.

Система уравнений для контуров делителя частоты и уравнения намагничивающих сил магнитопроводов позволяют получить следующее уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре делителя частоты

$$\frac{d^2(\beta b_A - \beta b_B)}{d\tau^2} + 2g_* \frac{d(\beta b_A - \beta b_B)}{d\tau} + (\text{sh} \beta b_A - \text{sh} \beta b_B) \frac{1}{K} = 0, \quad (1)$$

где b_A и b_B – мгновенные значения индукции в сердечниках А и Б; $2g_* = g/(\omega C_k)$; $K = \frac{2w_2^2 C_k q \omega^2}{\alpha \beta l_{\text{ср}}}$;

$\tau = t\omega$; q – площадь поперечного сечения сердечника; $l_{\text{ср}}$ – длина средней силовой линии; ω – половинная частота.

На границе возбуждения колебаний половинной частоты, когда ток в колебательном контуре равен нулю, $b_A = b_B$, поэтому задача выявления условий возбуждения заключается в исследовании устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения (1), которое при малом возмущении $\Delta b = b_A - b_B$ сводится к уравнению

$$\frac{d^2 \beta \Delta b}{d\tau^2} + 2g_* \frac{d\beta \Delta b}{d\tau} + \beta \Delta b \frac{1}{K} \text{ch} \beta b = 0, \quad (2)$$

а подстановкой $\Delta b = \eta e^{-g_* \tau}$ к виду

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + \left[-g_*^2 + \frac{1}{K} \operatorname{ch} \beta b \right] \eta = 0.$$

В полученном уравнении (2) коэффициент при $\beta \Delta b$ представляет собой отношение мгновенной резонансной частоты колебательного контура к квадрату половинной частоты ω .

Перед возникновением параметрических колебаний индукция в сердечнике принята в виде

$$b = B_1 \sin 2\tau + B_0, \quad (3)$$

где B_1 – амплитуда основной гармоники индукции; B_0 – постоянная составляющая индукции.

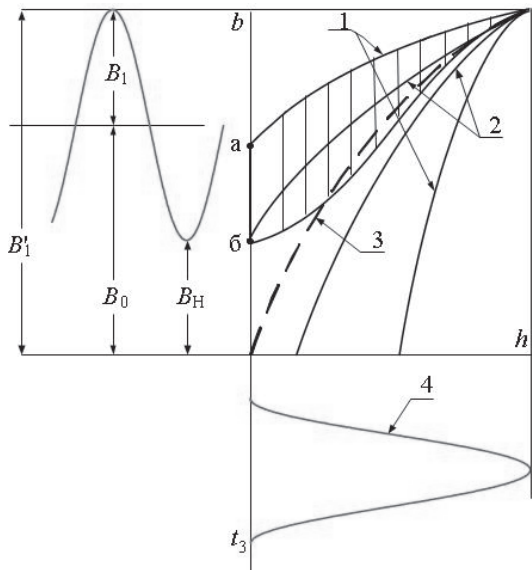


Рис. 2. Процесс намагничивания сердечника делителя частоты перед возбуждением колебаний: 1) динамическая петля; 2) статическая петля; 3) средняя кривая намагничивания; 4) ток в цепи обмоток возбуждения

Связь между амплитудой переменной составляющей индукции B_1 и постоянной составляющей установлена с учетом того, что перемагничивание сердечника происходит по частному циклу (рис. 2). Как видно, $B_0 = B_H + B_1$. Зависимость B_H от

B_1 , полученная экспериментально на образцах магнитопроводов, имеет такой вид, рис. 3, что ее с достаточной точностью можно аппроксимировать функцией

$$B_H = B_{H\max} (1 - e^{-k_b B_1}),$$

где $B_{H\max}$ – максимальное значение B_H , определяемое по экспериментальным зависимостям $B_H(B_1)$; k_b – коэффициент, имеющий размерность, обратную размерности индукции.

При изменении индукции по (3) $\operatorname{ch} \beta b$ представляет собой периодическую функцию, при разложении которой в ряд Фурье получаем

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + [\Omega_0 + 2(\Omega_1 \sin 2\tau + \Omega_2 \cos 4\tau + \dots)] \eta = 0, \quad (4)$$

где

$$\Omega_0 = \frac{1}{K} \operatorname{ch} \beta B_0 J_0(j\beta B_1) - g_*^2;$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{K} \operatorname{sh} \beta B_0 [-jJ_1(j\beta B_1)];$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{K} \operatorname{ch} \beta B_0 J_2(j\beta B_1);$$

$J_0(j\beta B_1)$, $-jJ_1(j\beta B_1)$, $J_2(j\beta B_1)$ – функция Бесселя от мнимого аргумента (индексы 0, 1, 2... – порядок функции).

Коэффициент Ω_0 есть среднее значение, а коэффициент Ω_1 – первая гармоника отношения квадрата периодически изменяющейся собственной частоты колебательного контура к квадрату половинной частоты.

Для полученного уравнения (4) с периодически изменяющимися коэффициентами (уравнение Хилла) известны уравнения линий, разграничивающие области устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения [4]. Возбуждению колебаний половинной частоты соответствует первая область неустойчивости, уравнение граничных линий которой имеет вид

$$(\Omega_0 - 1)^2 + 2(\Omega_0 + 1)^2 g_*^2 + g_*^4 = \Omega_1^2. \quad (5)$$

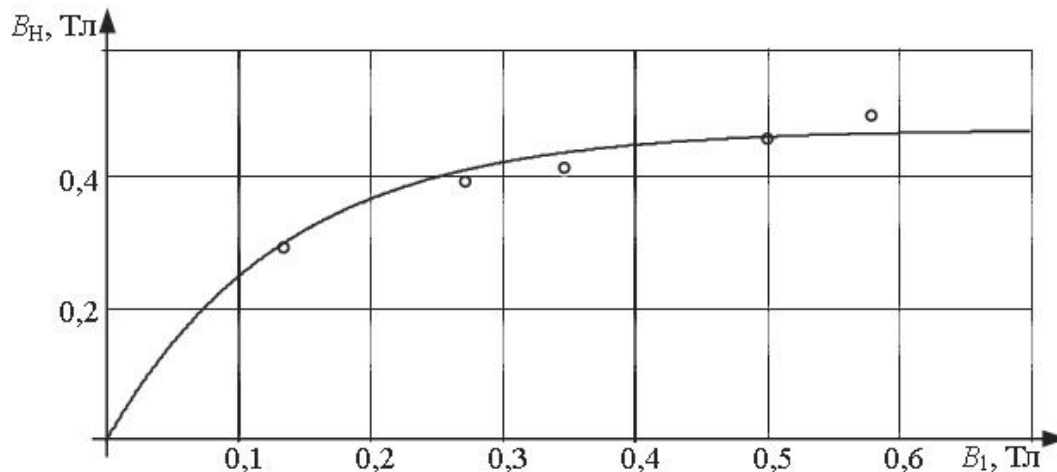


Рис. 3. Зависимость $B_H(B_1)$ для сердечника Ш-32х16: $\circ\circ\circ$ – опытные данные; — – аппроксимированная кривая

В данном случае принципиальным обстоятельством является сохранение колебательного характера свободного процесса в контуре делителя частоты, что возможно, если $g_*^2 < \Omega_0$ и $g_*^4 < \Omega_1$. Поэтому в (5) членами, содержащими g_*^2 и g_*^4 можно пренебречь, что дает

$$\Omega_0 \pm \Omega_1 = 1 \text{ при } \Omega_0 > 0, \Omega_1 > 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) с учетом выражений для Ω_0 и Ω_1 по (3) позволяет получить значения амплитуды индукции B_1 на границах возникновения колебаний половинной частоты.

Сопоставление расчетных и экспериментальных данных приведено на рис. 4. В данном случае и далее расчеты проводятся относительно безразмерной величины βB , т. к. это дает результаты, не привязанные к конкретному образцу делителя частоты.

Для практических целей достаточно определения значения индукции на нижней границе области неустойчивости или одного из значений индукции, соответствующего попаданию в область неустойчивости. Для решения задачи в такой постановке целесообразно принять точку внутри области неустойчивости с координатами $\Omega_1 = 0; \Omega_0 = 1$.

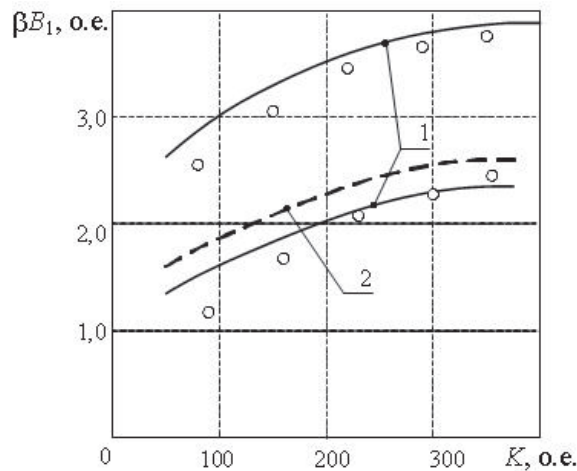


Рис. 4. Амплитуда индукции на границах возникновения колебаний половинной частоты: 1) по условию (6); 2) по условию $\Omega_0 = 1$; $\circ \circ \circ$ — опытные данные

Коэффициент Ω_0 , как указывалось выше, есть среднее значение квадрата отношения собственной частоты колебательного контура к половинной частоте. Поэтому условие $\Omega_0 = 1$ одновременно отображает необходимое условие существования параметрических колебаний. Расчетные значения индукции, удовлетворяющие условию $\Omega_0 = 1$, нанесены также на рис. 4 (кривая 2) и располагаются близко к нижней границе области неустойчивости.

Покажем далее, что условие равенства частоты параметрических колебаний средней собственной частоте дает возможность получить необходимые расчетные соотношения и для стационарного режима деления частоты. В стационарном режиме индукция в магнитопроводах делителя частоты содержит три составляющие

$$\begin{aligned} b_A &= B_0 + B_1 \sin(2\tau + \varphi) + B_2 \sin \tau; \\ b_B &= B_0 + B_1 \sin(2\tau + \varphi) - B_2 \sin \tau, \end{aligned} \quad (7)$$

где B_2 — амплитуда индукции половинной частоты.

Сначала решим задачу стационарного режима одним из известных методов, каковыми, например, являются методы коллокации [5] и гармонического баланса. Применим метод коллокации. Решая уравнение (1) с учетом (7) для трех точек коллокации $\tau = \pi/2, \tau = \pi/4, \tau = -\pi/4$, получим

$$\frac{\beta B_2}{\operatorname{sh} \beta B_2} = \frac{1}{K} \operatorname{ch} Q_1, \quad (8)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\beta B_2}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2} \beta B_2} = \frac{1}{K(1-2g_*)} \operatorname{ch} Q_2,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\beta B_2}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2} \beta B_2} = \frac{1}{K(1+2g_*)} \operatorname{ch} Q_3,$$

$$\begin{aligned} \text{где } Q_1 &= \beta B_0 - \beta B_1 \sin \varphi, \quad Q_2 = \beta B_0 + \beta B_1 \cos \varphi, \\ Q_3 &= \beta B_0 - \beta B_1 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Для определения амплитуды индукции половинной частоты воспользуемся уравнением (8). Левая часть этого уравнения убывает с ростом амплитуды индукции половинной частоты, поэтому ее максимальное значение будет иметь место при минимально возможном значении $\operatorname{ch} Q_1 = 1$, т. е. при $Q_1 = 0$. Максимальное значение амплитуды индукции B_2 , определенное по (8), при таких условиях хорошо совпадает со значениями, полученными экспериментально, рис. 5.

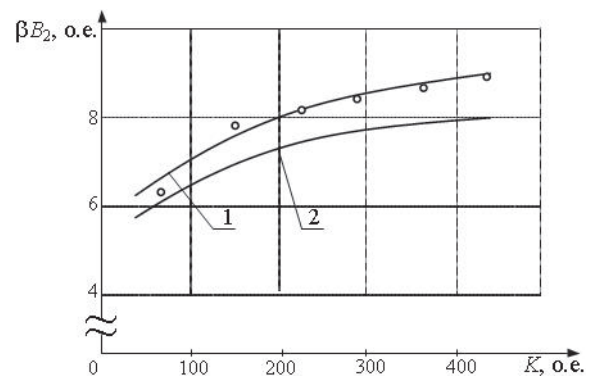


Рис. 5. Амплитуда индукции субгармоники, определенная: 1) методом коллокации; 2) по средней свободной частоте; $\circ \circ \circ$ — опытные данные

Так как максимальное значение амплитуды субгармоники имеет место при $Q_1 = 0$, а Q_1 определяется составляющими B_0 и B_1 , сделано предположение, что в стационарном режиме электромагнитное состояние делителя частоты в основном определяется составляющей индукции половинной частоты $b_A = B_2 \sin \tau$ и $b_B = -B_2 \sin \tau$.

При таком допущении для определения амплитуды индукции B_2 используем условие равенства сред-

него квадрата частоты квадрату половинной частоты. Среднюю собственную частоту определим как

$$[\omega^2(t)]_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{l(t)C_K},$$

где $l(t)$ – мгновенное значение индуктивности; T – период колебаний половинной частоты.

Мгновенное значение индуктивности равно

$$l(t) = \mu \frac{2qw_2^2}{l_{\text{ср}}}. \quad (9)$$

В (9) μ – магнитная проницаемость магнитопроводов делителя частоты, определяемая как

$$\mu = \frac{1}{\alpha\beta\text{ch}\beta b}. \quad (10)$$

С учетом (9) и (10)

$$[\omega^2(t)]_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{l_{\text{ср}} \alpha\beta\text{ch}\beta b}{2qw_2^2 C_K} d\tau. \quad (11)$$

Разделив в (11) левую и правую часть на ω^2 и разложив $\text{ch}\beta b$ в ряд Фурье, получим

$$\frac{[\omega^2(t)]_{\text{ср}}}{\omega^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{K} \frac{1}{2\pi} [J_0(j\beta B_2) + 2J_2(j\beta B_2) + \dots] d\tau. \quad (12)$$

При интегрировании периодические составляющие подынтегрального выражения в (12) дают нулевое значение, поэтому

$$\frac{[\omega^2(t)]_{\text{ср}}}{\omega^2} = \frac{1}{K} J_0(j\beta B_2).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнштейн Р.А., Лапин В.И., Наумов А.М., Доронин А.В. Защита от замыканий на землю в обмотке статора генераторов на электростанциях ОЭС Сибири // Электрические станции. – 2009. – № 12. – С. 26–30.
2. Мандельштам Л.И. Собрание трудов. Т. 2. – М.: Изд-во АН СССР, 1950. – 350 с.
3. Релей Дж.В. Теория звука. Т. 1. – М.: Наука. – 1955. – 120 с.

Так как должно выполняться условие $\frac{[\omega^2(t)]_{\text{ср}}}{\omega^2} = 1$, то окончательно получим следующее выражение для определения βB_2

$$J_0(j\beta B_2) = K. \quad (13)$$

Результаты расчетов по (13), рис. 5 (кривая 2), удовлетворительно соответствуют опытным данным. При использовании для электромагнитного параметрического делителя частоты холоднокатаной электротехнической стали коэффициент K принимается в пределах 200...300, чему соответствует индукция $B_2 = 1,7...1,8$ Тл. Отличие расчетных данных, полученных по средней собственной частоте при таких значениях K , от опытных не превышает 10...15 %.

Выводы

1. Предложен универсальный критерий для расчета параметров нелинейного колебательного контура с периодически изменяющимся параметром.
2. Показано, что использование условия равенства среднего квадрата собственной частоты колебательного контура квадрату частоты параметрических колебаний позволяет получить результаты, приемлемо совпадающие с опытными данными.
3. Полученные соотношения могут быть использованы для расчета конструктивных параметров электромагнитного параметрического делителя частоты.

4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир, 1968. – 168 с.
5. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 860 с.

Поступила 08.06.2011 г.